一般相対性理論入門
ブラックホール探査

EXPLORING
BLACK HOLES

Introduction to General Relativity

Edwin F. Taylor・John Archibald Wheeler

エドウィン・F・テイラー
ジョン・アーチボルド・ホイーラー：著　　**牧野伸義**：訳

PEARSON
Education
Japan

TOKYO, JAPAN

いったいブラックホールは見えるのか。 見えるとしたら、どんなふうに見えるのか。 黒いのか。近くで止っていると、どれくらい大きく見えるのか。 ブラックホールに落ちていると、違って見えるのか。 どんな感じなのか。 気持ちよいのか。 ブラックホールに落ちるとき、頭上に星々が見えるのか。 もしそうなら、それらの星の位置と色は変わるのか。 外の友人からメッセージや小包を受け取ることができるのか。 外の友人に何も送ることができない、光でさえも、というのは本当か。 なぜできないのか。 ブラックホールに落ちた後どれだけ長く生きていられるのか。 中心にたどり着けるのか、また途中で何か起きるのか。 中心にたどり着けるとすると、近づく間中心を見ることができるのか。 なぜ中心で死んでしまうのか。 そのとき身体はどうなるのか。 痛みもなくすぐ死はやってくるのか。 最後に何が見えるのか。 あらゆるものがブラックホールの中心で点に潰れてしまうのか。 どこにブラックホールはあるのか。銀河中心に、それとも銀河間空間に単独で。 ブラックホールを回る石の軌道は、太陽を回る惑星の軌道とどう違うのか。 ブラックホールの周りを円軌道する石の速さはどれくらいなのか。 石は光速にたどりつけるのか。 円軌道でどれだけブラックホールに近づけるのか。 ブラックホールを回る軌道をどのように使えば、未来への時間旅行ができるのか。 ブラックホールを回る軌道を使えば、過去への時間旅行ができるのか。 光はブラックホールの近くで速くなったり遅くなったりしないのか。 どんな意味で時空は統一されるのか。 相対性という言葉はすべてが相対的だという意味なのか。 「時空の曲率」とは何を意味するのか。この曲率をどうやったら観測できるのか。 GPS（全地球測位システム）はどのような仕組みで動いているのか。 一般相対論は GPS の動作に影響を与えるのか。 光は地球から離れると「疲れる」のか。 ブラックホールから離れるとどうなるか。 この疲労をどうやったら観測できるのか。 太陽を通過するとき、光は方向を変えるのか。 方向は大きく変わるのか。 方向の変化は光の色によって違うのか。 方向の変化はどうやったら観測できるのか。天体は、遠い星や銀河からの光をどうやって絞るのか。 この絞られた像はどのように見えるのか。 光はブラックホールの周りの軌道上に入っていくことができるのか。 石のエネルギーは速度とともに変化するのか。 どうやったら地球上で質量をエネルギーに変えられるのか。 エネルギーから質量へは可能か。ブラックホールに突入している石は光速に達するのか。 突入している石は光速を超えられるか。 石が吸い込まれると、ブラックホールの質量はどうなるのか。 ブラックホールの近くで重力加速度はどのくらい大きくなるのか。 ブラックホールは自転できるのか。 もしそうなら、自転はどこまで速くなるのか。 自転するブラックホールは空間を引きずるのか。 「空間の引きずり」は何を意味するのか。 この引きずりをどうやって観測すればよいのか。 回転と同じ方向に進む光や、回転と逆に進む光はどうなるのか。 自転するブラックホールの回転エネルギーをどうすれば発電に使うことができるだろうか。 自転するブラックホールはクエーサーにエネルギーを供給することができるのか。 クエーサって何だ。 自転しているブラックホールを使えば、超空間を通って宇宙の別の世界にたどり着けるのか。 宇宙は非常に大きなブラックホールなのか。 宇宙の大きさは時間とともにどのように変わっているのか。 この宇宙の大きさとは何のことか。 宇宙はビッグクランチに潰れるのだろうか。 または宇宙は永遠に膨張し続けるのか。 最近の観測から宇宙の最終的な運命が予言できるのか。

> 好奇心はコーヒーのように後天的な必需品である。初めのくすぐったいような感覚から、究めるとともに情熱へと変わる。
>
> –トンプソン（Nicolas S. Thompson）

謝 辞

12 年間このテキストはいくつもの版を重ね、多くのクラスの学生が読んでくれた。彼らは些細な困難をわかちあい、アドバイスしてくれた（"Only the Student Knows," *American Journal of Physics,* Volume 60, Number 3, March 1992, 201–202 ページ）。テキスト中の「考える反論者」はこうしたやりとりから生まれたものである。

この本は、モンタナ州立大学の National Teachers Enhancement Network の授業としてインターネット上で使われた。高校の理科の教師が多く参加し、彼ら技術と興味は教育的な効果の向上とこの本の物理の内容のために役立った。

Nora Thornber はオンライン上の多くのクラスでいくつもの版にわたりこの本で教え、ずっと丹念に草稿を読み、多くの提案や、式の導出の仕方をわかりやすく、簡略化してくれた。彼女はこの本について多くの時間と努力を費すことを、著者を除いた誰よりも惜しまなかった。

相対論の専門家、大学院生とポスドク、教授達、その他の人々がこの本の様々な版の一部、すべてを読んで調べてくれ、わかりやすくするため、現代的な結果を採り入れるため、多くの間違いを訂正するための意見をくれた。アルファベット順に名を挙げれば、Kashif Alvi, Edmund Bertschinger, Lior M. Burko, Sean M. Carroll, Teviet D. Creighton, Alexei V. Filippenko, Sergio Goncalves, Tom Goodale, William A. Hiscock, Lawrence E. Kidder, Shane L. Larson, Lee Lindblom, Yuk-Tung Liu, Anupam Mazumdar, Charles W. Misner, Jonathan Morris, Mark A. Pelath, Patricia Purdue, Yuri Levin, Kip S. Thorne, Michele Vallisneri, Vrata Venet, Clifford M. Will, and Kazunori Yoshida. もし本書に間違いがあったとしても、これら威厳ある仲間たちが責任を負うものではない。

G. P. Sastry はこの本の数段階で細かく一般的なアドバイスをくれ、学生 14 人を監督し最終版を読ませ、コメントを集め、すべての練習問題を解かせた。彼と 2 人の学生 Manish Niranjan と Saswat Sarangi は彼らの解答を元に本書の「解答の手引き」を作成した。

Philip Morrison はコメントをくれ、相対論の古典的な扱いにおいて、不思議な量子粒子と光子が現れないことを確信させてくれた（練習問題は除く）。

Eric Sheldon はこの本の草稿を読んでくれた。彼の判断力と文学について幅広い知識によって、本書の表現が明確で豊かになった。Sanjoy Mahajan によって物理と表現の明確さが大きく改善された。Ira Mantz は最終版について広範囲にわたって注意深く重大で有効なコメントをくれた。Stamatis Vokos と Rachel E. Scherr は初期の版から教え、有益な提案を多くしてくれた。Rachel Scherr は本の見返し部分に疑問文を羅列することを擁護し、改訂してくれた。Bete Keramati は章とプロジェクトの初めに疑問点をおくことを勧めてくれた。Ewa M. Basinska は参照文献を置いてくれた。Peter M. Brown は数々の提案をしてくれ、引用文を探し、用語集の草稿を書き、読み物のリストを集め、カバーのアイディアを教えてくれた。Michael J. Tsai は裏表紙のデザインを考え出し、改善するための力になってくれた。いろんな段階の草稿を読んでくれた人びと：Curt Covey, Sally Ganner, Roy Gould, Vivek, Iyer, Roy Lisker, Sergey V. Siparov. Penny Hull の編集のおかげで英語と物理の両方が明快にすっきりした形になった。

そして、Carla がいてくれた。

本のデザイン： Karen A. Schriver
表紙の下の土星のイメージ：Erich Karkoschka, University of Arizona, and NASA.
表紙の上のイメージ： Edmund Bertschinger and Miriam L. Castellano.
（これらのイメージについては、プロジェクト D 「アインシュタインリング」の D.9 節、D.10 節を見よ。）

注意：女性、男性とも有能な観測者である。通常、シュワルツシルト記録係とカー記録係と呼ばれる遠方の観測者だけでなく（軌道運動またはまっすぐ落下している）自由浮遊の観測者を女性とした。（定義については用語集を見よ）自転しないブラックホールの周りの球殻上で立っているのと、自転するブラックホールの周りの円環に乗っているのが男性観測者である。他の設定では、性別の区別のない言葉を使うようにした。そうすることが不便なときには、性別は無作為に選んだ*1。

*1 訳注：原著者は性差別につながらないように慎重に文書を作成した。

まえがき

唯一のゴール

この本『一般相対性理論入門（ブラックホール探求）』は一般相対論とブラックホールをかき分けて直接的に速く突き進む。たくさんのトピックスを含むが、そのすべてが唯一のゴールに向かっている。

ゴール：読者に力を！地球やブラックホール付近の曲がった時空についての質問に答えられるようになり、それらの計算ができるような手段を我々は提供する。トピックスは、微積分と特殊相対論の初歩的な知識から始まり、積極的に関われるものに限った。一般相対論で展開される手段はあなたが自ら探求を続けようとするときに役立つ。

— Edwin F. Taylor and John Archibald Wheeler

答えられない疑問とその対処法

ここに、この本で答えることのできない重要な疑問を挙げた。

- 一般相対論で繰り広げられる現象の全範囲はどうなっているのか。
- 一般相対論がどのように始まったか、そしてこの本で述べられる考えは誰が奮闘して作り上げたのか。
- 重力波やパルサー、超新星、星それにブラックホールの形成はどうなっているのか。
- 研究の最先端はどうなっているのか。そして、その最先端はどの程度進んでいるのか。
- 観測衛星から得られた最近の結果と宇宙の起源について最近の理論がどうなっているのか。

最近の観測結果を探そうと思えば、World Wide Web ほどよい情報源はない。そのアドレスは 1 月ごとにかわり、1 時間ごとに変わってさえいる。ハッブルの写真と解説の web site は `http://oposite.stsci.edu/pubinfo/Pictures.html` にある。より最新の情報は、15 歳のコンサルタントに訊け。

この本では答えられない疑問に取り組もうとするときに役に立つという点で、以下の本に優る一般書はない。それは本書を完全に補う。

Black Holes and Time Warps
Einstein's Outrageous Legacy
Kip S. Thorne
W. W. Norton, New York, 1994
ISBN 0-393-31276-3, ペーパーバック

歴史と人物、理論、結果、思索が 600 ページ、0.9 キログラムに凝縮している。第一人者による、完全で、愉快で夢中になれる概論書を想像することは困難である。その本の中で、補註、登場人物、年表、用語解説、人名索引、事項索引が相互参照されている。我々は Thorne の本を Prologue: A Voyage among the Holes（プロローグ ホール巡りの旅）から読み始めることを勧める。そこで、読者は SF の話として、ブラックホールとその奇妙な性質に遭遇する。

著者の一人（テイラー）は以下の web site で本書を更新している。`http://www.eftaylor.com`

内容目次

第５章　見える世界

星の多重像を見て、光の円軌道を見つける。**成果：**光の軌道を正確に計算できる。または一目ですぐに予測できる。

プロジェクトＤ　アインシュタインリング

星と銀河、ブラックホールはレンズとして作用し、遠くの天体からの光を増幅し、像は歪められる。

プロジェクトＥ　太陽付近で遅くなる光

同じ領域で、ある測定では光が $v = 1$ で進み、別の測定では $v = 1$ より遅くなる。実験でその食い違った予測の正誤が高い精度で確かめられる。

プロジェクトＦ　自転するブラックホール

横に流され、負のエネルギーをもち、自転するブラックホールから回転エネルギーを取り出す。

プロジェクトＧ　フリードマン宇宙

転がる車輪のリム上の点として表される宇宙。

目　次

第 4 章　軌道上の世界　153

プロジェクト C　水星の近日点移動　191

第 5 章　見える世界　203

第1章

高速の世界

- 「時空が一つのもの」だなんて？
- 「相対論」ではすべてのものが相対的だって本当？
- 行くことが可能な最も遠い銀河はどれか？
- 発見されている最も速いものは何か？

重要なことは疑問を抱き続けることだ。好奇心それ自体に存在意義がある。永遠、生命、現実世界の不可思議な構造、これらの神秘をじっくり考えるとき、畏敬の念を感じざるを得ない。日々この神秘を理解しようと努めることだけで十分である。決して神聖な好奇心を失ってはならない。

— アインシュタイン（Albert Einstein）

1.1 特殊相対性理論

カギとなる考え：高速の物体を調べるときに有効な概念は、非常に重い物体の近くの時空を調べるときにも役立つ。

我々は自然の限界を探査するために相対性理論を使う。**特殊相対性理論**（特殊相対論）は高速の物体の運動を記述できる。**一般相対性理論**（一般相対論）—**重力理論**—は星や銀河、ブラックホールなどの重い物体の近くにある物質と運動を記述する。一般相対論は宇宙全体も記述できる。この章では、一般相対論について理解を深めるに当たって有効となる特殊相対論の概念を少しだけ議論する。ここでは特殊相対論に詳しく入り込むつもりはない。その目的のためには1.11節の特殊相対論の読み物にあたるか、著者自身の書いた詳しい参考書を各節の終わりに載せておいたので、そちらを読んでもらいたい。

特殊相対性理論：速い物体
一般相対性理論：重い物体の近くの時空

1.2 腕時計時間

2つの事象の間の腕時計時間はすべての人で一致する。

相対論 の根源にあるものは何か。我々を理解へと導く一つの単純な考え方というもの

腕時計の二つの刻みの時刻から相対論を始める。

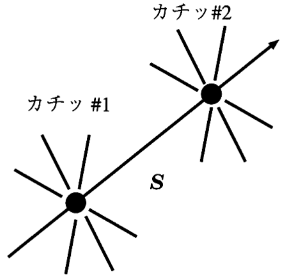


図 1.1　空間中を一様の速さで直線的に移動する石の軌跡。石は腕時計を備え、#1 でカチッと鳴って発光し、#2 で再びカチッと鳴り 2 回目の発光をする。2 回のカチッという音は、この図が描かれている系で測ると距離 s 離れていて時間間隔は t である。

があるのだろうか。不思議の国のアリスは、ウサギが懐中時計を持って彼女の前を通り過ぎるところから始まる。我々の相対論への冒険は、腕時計を持った石が我々のそばを通り過ぎることから始まる。

腕時計は #1 で 1 回カチッと鳴り、#2 でも 1 回カチッと鳴る（図 1)。腕時計の刻みは 1 秒間隔かもしれないし 1 マイクロ秒間隔かもしれない。ある**自由浮遊系**または**慣性基準系**でこれらの刻みの距離間隔 s と 時間間隔 t を測ることを考えよう（自由浮遊系は 1.8 節で述べる。簡単に言えば、ニュートンの第一法則が成り立つ系のことで、静止した自由粒子は止まったままで、動いている粒子は等速直線運動を続ける)。特殊相対論で注意すべき点は、通常、我々に対して一様に相対運動する観測者が記録した空間間隔 s と時間間隔 t が我々とは異った値になっているということである。これは好ましいことではない。しかし特殊相対論での重要な点が明らかになったことはよいことだ。つまり相対運動がどうなっていても、s と t がどんな値でも、あらゆる慣性系の観測者が測っても、石とともに飛んでいる腕時計の時間間隔 τ は同じ値になる。その公式は単純である：

$$\tau^2 = t^2 - s^2 \tag{1.1}$$

腕時計時間の定義

我々は 時計がカチッ、カチッと 2 回鳴る間の時間間隔を腕時計時間として、ギリシャ文字 τ（タウ）で表す。腕時計時間は通常**固有時**と呼ばれるか、または堅苦しい言葉で**時間的時空間隔**と呼ばれる（「時間的」と呼ぶのは時間間隔 t が空間間隔 s よりも大きいためである)。観測者はみな二つの事象間の腕時計時間が同じであることを認める。それに対して、t や s の値は慣性系で異なる。t を**座標時間**、s を**座標距離**と呼ぼう。腕時計時間 τ は、t が s よりも大きな事象すべての間隔を表すのに使える。腕時計時間は、ある事象から別の事象へと一様に動いている腕時計で時間経過がどうなっているかを、あらゆる慣性系の観測者に表示している。

同じ単位で空間と時間を測る。

簡単のため、空間と時間で同じ単位を使う。光年と年あるいは、距離のメートルと光進

時メートル（光が運動にかけた時間を距離で表したもの）のようなものを使う。これらの場合、光速 c が空間と時間の間の変換因子となる。例えば、秒と光進時メートルの関係は

$$t(\text{メートル}) = ct_{\text{秒}} \tag{1.2}$$

である。(1.1) 式は、カチッと鳴る腕時計時間を慣性系における時間と空間の間隔に結びつけるものであり、それを**計量**と呼ぶ。これはちょうどピタゴラスの定理（2 つの 2 乗の量の和）が、ユークリッド幾何学にしたがう空間における点の間の**距離**を表していたのと同じように、計量（2 つの 2 乗の量の差）は時空における事象の間隔を表す。計量は特殊相対論と一般相対論で中心的な役割を果たす。物理系を記述するときに計量を使えば、時空の（非量子的）性質についてあらゆる疑問に答えられる。多少拡張すれば粒子と光の軌跡も予測できる。

計量：すべての相対論における手がかり

すべての自由浮遊系の観測者は腕時計時間 τ が同じであることを認めるという事実から、腕時計時間は**不変量**という地位を獲得する。不変量とは、すべての観測者が計算したとき、基準系と無関係に同じ値になる量のことである。相対論においてあらゆる不変量は金科玉条的なものである。

腕時計時間は不変量

時計がカチッと鳴っている間に、石はどれだけ速く動いているのだろうか。石の速さは基準系によって異なる。図 1 の基準系では、速さ（一定を仮定）は $v = s/t$ である。距離 s と経過時間 t は同じ単位で測る。例えば、宇宙船が 1 年間に 0.5 光年進むと、速さは 0.5 年/年 となり、単位は打ち消し合う。別の例を挙げると、素粒子が 1 光進時メートル内に 0.7 メートル進むとき、その速さは 0.7 になる。したがって速さ v には単位がない。この本では物体の速さを光速の比として表し、記号 v を使う。

速度 v は光速の比である。

より詳しい説明： *Spacetime Physics,*[*1]Chapter 1, Spacetime:Overview; Chapter3, Same Laws for All; Chapter 6, Regions of Spacetime.

1.3 固有距離

誰が測っても 2 つの事象間の固有距離は一致する。

ある自由浮遊系で、2 つの爆竹が 1 メートル離れて同時に爆発した。この系で爆発は**同時**である。これらの爆発が同じ位置で起きるように速く飛ぶ石など存在しない。無限大の速度が必要となり不可能である。したがって (1.1) 式によってこれらの事象間の腕時計時間を定義しても無意味である。

よって同時に起きた爆発の間の時間を測定しても意味がない。だが、長さを測ることには何の問題もない。**質問：**我々の基準系で、棒が動いているか静止しているかに関係なく棒の長さを測るにはどうしたらよいのか。**答え：** 我々の基準系で爆竹を棒の両端につけて

棒の長さを測定するために同時に爆発させる。

[*1] 初版には日本語訳がある。曽我見 郁夫, 林 浩一翻訳『時空の物理学』（現代数学社）

例題 1　腕時計時間

問題 1A. 推進力を使わず一定速度で動いている宇宙船が、太陽の静止系で 5 年間に 3 光年移動した。宇宙船の時計で記録すると、この間の経過時間はいくらになるか。

解 1A. 宇宙船旅行の初めと終わりの事象は太陽の基準系では $s = 3$ 光年と $t = 5$ 年離れている。(1.1) 式から得られる腕時計時間は

$$\begin{aligned}\tau^2 &= t^2 - s^2 = 5^2 - 3^2\\ &= 25 - 9 = 16 \text{ 年}^2\\ \tau &= 4 \text{ 年}\end{aligned} \tag{1.3}$$

となり、太陽の基準系で測る経過時間よりも短い。

問題 1B. ある素粒子が粒子加速器の中で作られ、4 メートル離れた検出器に到達する。かかった時間は研究室系で 5 光進時メートルである。素粒子の腕時計で記録すると、生成から検出までの時間はいくらになるか。

解 1B. 生成と検出の事象は研究室系で $s = 4$ メートル、$t = 5$ 光進時メートル離れている。(1.1) 式から

$$\begin{aligned}\tau^2 &= t^2 - s^2 = 5^2 - 4^2\\ &= 25 - 16 = 9 \text{ メートル}^2\\ \tau &= 3 \text{ メートル}\end{aligned} \tag{1.4}$$

がわかる。ここでも、粒子の腕時計時間は実験室系の時間よりも短い。

同時に（$t = 0$）点火する。我々の基準系における棒の長さを爆発の間の距離として定義する。

特殊相対論で注意すべきは、一様な相対速度で通り過ぎる観測者は 2 つの爆竹が同時に爆発したことに同意しないことである。これは好ましいことではない（これが特殊相対論の理解を困難にしている）。でも、よいこともある。相対運動がどうなっていても、すべての慣性系の観測者は爆発が同時に起きた慣性系で記録された距離 σ を計算によって求めることができる。この新しく現れた計量は古い計量 (1.1) の変形である：

$$\sigma^2 = s^2 - t^2 \tag{1.8}$$

固有距離は不変量

ギリシャ文字 σ（シグマ）は、事象間の**固有距離**と呼ばれることもあるし、もっと堅苦しい言葉では**空間的時空間隔**と呼ばれる（「空間的」とは、空間間隔 s が時間間隔 t よりも大きいためである）。あらゆる自由浮遊系における固有距離の観測値は一致する。固有距離は不変量である。それに対して事象間の t と s の値は、基準系によってふつうは異なる。固有距離 σ を使えば、t よりも大きな s の値のあらゆる事象間隔を記述できる。すべての基準系の観測者は、事象が同時に起きた系における事象間距離 σ を知ることができる。

棒の静止系で測った長さに特別大きな意味を持たせた。その静止系で棒の両端で同時に爆竹を爆発させよう。これら爆発の間の距離を棒の**固有長さ**と呼ぶ。どんな慣性観測者に対しても、自分がどんな相対運動をしていようとも、これらの爆発（棒の両端で起きるすべての空間的事象の組）の間の時間 t と空間 s の測定値を使えば (1.8) 式から棒の固有長さと同じ値を計算することができる。

例題 2 アンドロメダへ高速旅行

宇宙船が地球からアンドロメダ銀河へ一定速度 v で旅行するとき、乗客の時間でたった 1 年しかかからないようにするためには速度 v はほぼいくらでなければならないか。アンドロメダ銀河は地球から 200 万光年の距離にある。

解

問題文の「ほぼ」という言葉から、仮定をしてもよいことがわかる。太陽からアンドロメダまでずっと一つの自由浮遊系が伸びていて特殊相対論が使えることを仮定してもよいだのだ。さらに太陽の基準系で測った宇宙船の速さ v が光速 1 に近いことを想定している。そのため以下の計算段階の最後で $(1+v) \approx 2$ としてもよい：

$$\begin{aligned}\tau^2 &= t^2 - s^2 \\ &= t^2\left(1 - \frac{s^2}{t^2}\right) \\ &= t^2(1 - v^2) \\ &= t^2(1+v)(1-v) \\ &\approx 2t^2(1-v)\end{aligned} \tag{1.5}$$

したがって

$$1 - v \approx \frac{\tau^2}{2t^2} \tag{1.6}$$

が得られる。さて、我々は v が光速に非常に近いと仮定している。太陽の基準系で測った旅行時間 t と光が進むのにかかる時間は非常に近く、200 万年である。この値を代入し、宇宙船の腕時計時間を $\tau = 1$ 年にすると

$$\begin{aligned}1 - v &= \frac{\tau^2}{2t^2} = \frac{1\,\text{年}^2}{2 \times 4 \times 10^{12}\text{年}^2} \\ &= \frac{10^{-12}}{8} = 1.25 \times 10^{-13}\end{aligned} \tag{1.7}$$

が得られる。(1.7) 式では実用的な科学的記法で結果を表している。しかしながら、あなたの友人にこの速さを光速との比 $v = 0.999\,999\,999\,999\,875$ として報告すると、びっくりするかもしれない。この結果によって、太陽の基準系における v の値と旅行時間について行った仮定は正当化される。**追加問題：** 宇宙船の乗組員が測定すると、地球からアンドロメダまでの距離はいくらになるか。

(1.1) 式と同じように (1.8) 式の空間と時間の単位は同じであり、光年と年または距離のメートルと光進時メートルなどが使われる。

時空間隔という名称は、時間的時空間隔 (1.1) と空間的時空間隔 (1.8) 式を併せたものに対して使う。

より詳しい説明： 距離 s と時間 t が同じ大きさのとき、(1.1) 式と (1.8) 式に何が起きるか。答えは *Spacetime Physics,* Chapter 6, Regions of Spacetime で探せ。

1.4 極値的加齢の原理

双子のパラドックスから自然な運動の記述が導かれる。

曲がった時空を調べるための準備として、特殊相対論によって運動が正しく記述できる**平坦時空**中で (1.8 節)、自由粒子の運動をよく調べよう。平坦時空は自由浮遊系の舞台である。

自由粒子は平坦時空をどのように運動するのだろうか？ ふつうそれに対する反応は以

例題 3 「高速の世界」はどこまでゆっくりになれるのか

A. (a) から (e) の質問に○か×で答えよ。
旅行した方が以下の場合、双子が再会すると、家にいた方の歳は上になっているか。
(a) アンドロメダ銀河（200 万光年）に急いで行って戻ってくる。
(b) アルファ・センタウリにひとっ飛びして戻る。
(c) 冥王星に飛んで帰ってくる。
(d) 地球の月に急いで行って帰ってくる。
(e) 近所の家へぶらぶら出かけて戻ってくる。

B. A の (e) の場合双子の一人が秒速 1 メートルで 100 メートル離れた近所の家に散歩に出かけるとき、双子の年令差はおよそどれくらいになるか。

解

A. A のすべての場合には、原理的に○と答えるべきである。家にいる方が年をとるであろう。B では、小さい相対速度の場合に生じる年令差の値を具体的に調べることになる。

B. (1.1) 式を s^2 について解き、双子の家から近所の家まで出かけることに応用する。問題文の「およそ」という言葉は仮定を使ってもよいという意味である。

日常生活で双子のパラドックスの影響に気づくことはなく、近所まで出かけるときには、座標時刻 t は腕時計時間 τ とほとんど同じだとしても問題ないであろう。以下のステップで $(t+\tau) \approx 2$ としてもよいだろうし、$t = s/v$ ともできる。

$$s^2 = t^2 - \tau^2 = (t+\tau)(t-\tau)$$

$$s^2 \approx 2t(t-\tau) = 2\frac{s}{v}(t-\tau) \tag{1.9}$$

(1.9) 式に $v/(2s)$ をかけると

$$t - \tau \approx \frac{sv}{2} \tag{1.10}$$

が得られる。速度 v を光速との比で表す必要がある。1 メートル毎秒は

$$v = \frac{1\,\text{メートル/秒}}{c} = \frac{1\,\text{メートル/秒}}{3\times10^8\,\text{メートル/秒}} = 3.3\times10^{-9} \tag{1.11}$$

となる。
この v の値を (1.10) 式に代入し往路の時間差を求めると

$$t-\tau \approx \frac{100\,\text{メートル}\times 3.3\times10^{-9}}{2} = \frac{3.3\times10^{-7}\,\text{光進時メートル}}{2} \tag{1.12}$$

が得られる。往復の差はこの値の 2 倍または 3.3×10^{-7} 光進時メートルとなる。これを光速で割ると、秒での時間差が得られる：

$$(\text{往復の時間差}) = \frac{3.3\times10^{-7}\,\text{メートル}}{3\times10^8\,\text{メートル/秒}} = 1.1\times10^{-15}\,\text{秒} \tag{1.13}$$

（この結果から、2 つの時間 t と τ がほとんど等しいとする我々の仮定が正しかったことが確認された）よって、近所をぶらぶらして戻って来た双子の 1 人は、家にいた双子のもう一方よりもほぼ 10^{-15} 秒若い。この小さな時間差は、最も正確な原子時計の測定の精度でも不可能である。これが日常生活で相対論的効果に気がつかない理由だ。しかし自然は、家にいる方の運動（その系において運動しないこと）が自然であると選び出すことによって差を浮かび上がらせる。

下のようになるだろう。「何てバカげた質問なんだ。少なくとも自由浮遊系で観測すればだが、自由粒子が等速直線運動をすることは誰だって知っている」確かにその通りだ。でも**な**ぜ自由粒子は等速直線運動をするのだろうか？ この運動の背後には何があるのだろうか？ 平坦時空における答えは、一般相対論の舞台である曲がった時空でのリハーサルとなるだろう。

運動についての深い考察は有名な**双子のパラドックス**から得られる。一卵性双生児の一人が地球に留まり、もう一人が大急ぎで遠くの星に旅をして帰ってくる。二人が再び会ったとき、留まっていた方は旅行した方よりも歳をとっている（この結果は例題1と2を原点への復路を含ませるように拡張することで予測できる)。再会すると、驚くべきことに双子はもはや別人となっている。なんとも奇妙な話である。しかし相対論を学んだ人は誰も年齢の差を疑わないだろう（と思う)。実際に高速粒子の実験で確かめられているのだ。

双子のパラドックスから自由粒子の運動を予言する。

双子のどちらが、我々が自然と呼ぶにふさわしい運動をしたのだろうか。ニュートン (Isaac Newton) は自然な運動の定義をした。彼なら「静止した双子は静止し続ける」と言うだろう。だから自然な運動をしたのは家にいた双子である。それに対して、出戻りの方は運動の状態を変える (行って帰ってくる) ために力が必要であり、力の影響を受けている。それによって姉妹は再び会うことができるのだ。旅行する方は力を受けるので自然ではない。

静止していることは自然な運動である。

別の自由浮遊系から見ると、双子の出不精の方は等速直線運動をしている。ここにも自然な運動がある。ニュートンならば「運動する方の双子は等速直線運動を続ける」と言っただろう。だから地球にいる方も、一様に相対運動している別の系、つまり基準系に対して一様に運動しているどんな系から見ても同様に自然になるのである。出不精の腕時計の時間の進みは計量 (1.1) から計算できる。

一様に動くことはもう一つの自然な運動である。

双子のパラドックスの学習の成果は、以下のようになるだろう。平坦時空で2つの事象を結ぶ自由な物体の自然な運動というものは、物体に装着した腕時計の読みが最大の時間になるようなものである。理想家は、我々の言っていることは、時計が**最大値**または最小値をとるのではなく、極値をとっているのだと主張するだろう。この本は最大腕時計時間の例だけを扱う。まだ理想家の気分を損ねない程度の余地を残しておこう。最大値と最小値という二つの言葉を極値という一つの言葉に置き換えよう。その結果は**極値的加齢の原理**である。

一般的な自然な運動：腕時計時間が極値をとるもの

極値的加齢の原理：自由な物体が時空の2つの事象を通る道筋は、物体の腕時計に記録される経過時間が極値をとるものである。

極値的加齢の原理は 空間が曲がっていても運動を記述できることがわかっている。極値的加齢の原理を使って、我々は曲がった時空、一般相対論の領域に進んで行く。だが、しばし平坦時空にとどまり、極値的加齢の原理を使ってエネルギーと運動量の相対論的な式を求めよう。

極値的加齢の原理：一般相対論でも適用可能

1.5 特殊相対論におけるエネルギー

極値的加齢の原理から自由粒子のエネルギーを求める。

計量（1.2節）と極値的加齢の原理（1.4節）から平坦時空におけるエネルギーの式、つまり特殊相対論で用いられるエネルギーの公式が得られる。計画の概要は以下の通りであ

計量と極値的加齢の原理からエネルギーを求める。

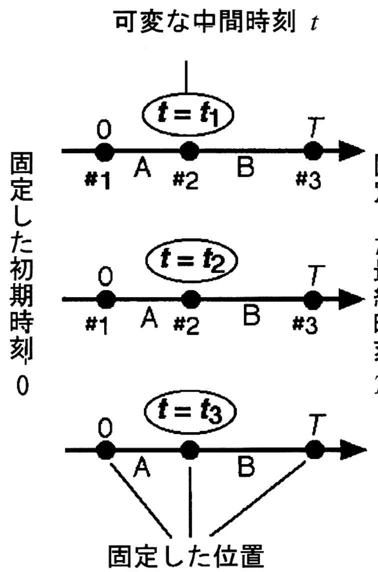


図 **1.2**　石が空間を直線に沿って進み、#**1**, #**2**, #**3** で **3** 回発光するときの **3** つの場合。発光するときの空間の位置は同じであり、#**1**, #**3** の時刻も同じである。しかし #**2** は **3** つの場合で異なる。ここで質問しよう：自由な石が自然な軌道を進むとき、中間の点をいつ通過し、#**2** の発光をするであろうか。初めと最後の発光の間の腕時計時間 τ が極値をとることを要請することでこの質問に答えよう。この要請から石のエネルギーに対する式が出てくる。

る：自然な経路にしたがう自由な石に、3 回発光する腕時計を備えつけておく。3 回の発光は決まった場所で起きるとし、発光時刻のうち最初と最後は決まっているとする。このようにして中間の発光時刻を最初から最後までの腕時計時間が極値をとるように選ぶ。その結果、経路のすべての区間で同じ値をとる量が得られる。つまり、この量は保存していることになる。この保存量をエネルギーと同定する。これから詳しくみていくことにしよう。

3 つの発光：いつ 2 回目の発光が起きるだろうか。

慣性系（図 2 と図 3）で見られるような、直線に沿って飛んでいる自由な石を考えよう。石は # 1, #2, #3 で 3 回発光し、経路は 2 つの隣合う区間 A, B に別けられる。これらの区間の長さは同じである必要はない。3 回の発光の空間的な位置を固定し、#1 と #3 の発光時刻も固定する。そこで考えよう。自由な石はいつ位置 #2 を通り過ぎ、2 回目の発光をするのだろうか。#1 から # 3 までの総腕時計時間が極値をとるという要請にしたがって 2 回目の時刻 t を求めよ。言い替えれば、極値的加齢の原理を使って 2 回目の発光時間を見つけよ。その結果が保存量、つまり石のエネルギーとなる。 さて一つ一つ順

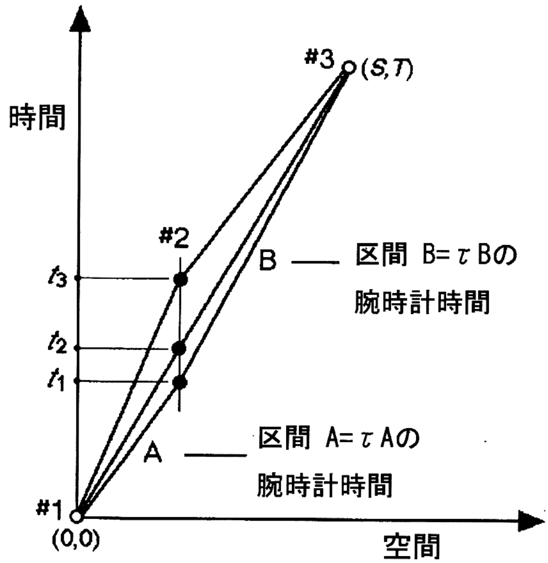


図 **1.3** 3 回（#**1**, #**2**, #**3**）発光して直線上を運動する石について **3** つの場合。図 **2** に示したものと同じであるが、石の運動が空間と時間で描かれている。このような時空の図を世界線と呼ぶ。各 **3** つの世界線上で、#**1** と#**3** の発光時間と場所は固定されている。#**2** の空間の位置（図の水平方向）は固定されているが、時間（図の上下方向）を変えて、#**1** から #**3** までの全腕時計時間 $\tau = \tau_{\mathbf{A}} + \tau_{\mathbf{B}}$ が極値になる時刻を探す。結果として運動の定数、つまり石のエネルギーの式が得られる。

を追って導出してみよう。

1. 発光 #1 と # 2 の間の座標時間を t とし、発光距離を s とする。区間 A に沿った腕時計時間 τ_{A} は計量 (1.1) から

$$\tau_{\mathrm{A}} = (t^2 - s^2)^{1/2} \tag{1.14}$$

であることがわかる。極値をとる加齢を求めるための準備として、中間時刻 t で上式を微分する：

$$\frac{d\tau_{\mathrm{A}}}{dt} = \frac{t}{(t^2 - s^2)^{1/2}} = \frac{t}{\tau_{\mathrm{A}}} \tag{1.15}$$

2. 次に、発光 #1 と#3 の間の時間を T に固定し、その距離も S とする。これにより、#2 と#3 の間の座標時間は $(T - t)$ となり、座標距離は $(S - s)$ となる。し

たがって、区間 B に沿った腕時計時間 τ_B は

$$\tau_B = \left[(T-t)^2 - (S-s)^2\right]^{1/2} \tag{1.16}$$

となる。

ここで、再び、極値的加齢の導出に備えて、 t で微分すると

$$\frac{d\tau_B}{dt} = \frac{-(T-t)}{[(T-t)^2-(S-s)^2]^{1/2}} = -\frac{T-t}{\tau_B} \tag{1.17}$$

が得られる。

3. 事象 #1 から#3 までの全腕時計時間は #1 から#2 の腕時計時間 τ_A と#2 から #3 の腕時計時間 τ_B の和である：

$$\tau = \tau_A + \tau_B \tag{1.18}$$

極値的加齢の原理を使って 2 回目の発光の時間を見つける。

4. それでは考えよう。いつ（座標時間 t）石が自然な経路をたどって中間点を通り過ぎ、二番目の発光 #2 をするのだろうか。極値的加齢の原理を使った答え：時刻 t は加齢（(1.18) 式の τ）が極値をとるようなものである。極値を求めるために τ を時刻 t で微分して 0 とおく。(1.18) 式の両辺を微分し、(1.15) 式と (1.17) 式を代入すると

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{d\tau_A}{dt} + \frac{d\tau_B}{dt} = \frac{t}{\tau_A} - \frac{T-t}{\tau_B} = 0 \tag{1.19}$$

となる。

5. 上式の最後の等式から

$$\frac{t}{\tau_A} = \frac{T-t}{\tau_B} \tag{1.20}$$

が得られる。

調整区間に対して同じ値をとる量。

6. (1.20) 式において、座標時間 t は粒子が区間 A を通る時間であり、これを t_A と呼ぶ。時間 $(T-t)$ は区間 B を通過している時間であり、これを t_B と呼ぶ。(1.20) 式は簡単な形に書き換えられる：

$$\frac{t_A}{\tau_A} = \frac{t_B}{\tau_B} \tag{1.21}$$

7. 区間 A と B の位置を、粒子が平坦時空領域を運動する 直線上で任意に選んでいた。(1.21) 式は経路に沿ってさえいれば、あらゆる位置におかれた区間のあらゆる組について成り立たなければならない。まだ A がどこから始まるべきか決めていなかった。この議論を始めるにあたって、2 番目の区間 B に 3 番目の区間 C（最初の 2 つの区間とは別の長さであってもよい）を加えることには何の問題もない。したがって (1.21) 式は 2 番目と 3 番目の区間にも適用できる。しかし、この量の

値が 1 番目と 2 番目の区間で等しく、2 番目と 3 番目でも等しければ、1 番目と 3 番目でも等しくなければならない。隣接した区間 A, B, C, D, ... を思い浮かべ、その各々に (1.21) 式を適用すれば方程式の組について

$$\frac{t_\mathrm{A}}{\tau_\mathrm{A}} = \frac{t_\mathrm{B}}{\tau_\mathrm{B}} = \frac{t_\mathrm{C}}{\tau_\mathrm{C}} = \frac{t_\mathrm{D}}{\tau_\mathrm{D}} = \cdots \tag{1.22}$$

が得られる。

まとめよう。自由粒子に対する運動の定数となる量、つまり平坦時空を運動する自由粒子があらゆる区間に沿って同じ値をとり続ける量を手に入れた。(1.22) 式は

$$\frac{t}{\tau} = \text{運動の定数} \tag{1.23}$$

である。この量はいったい何であろうか。粒子の全エネルギーに対する相対論的表現と関係がある。もしすでに特殊相対論を習っていれば、

$E/m = t/\tau$ は運動の定数である。

$$\frac{t}{\tau} = \frac{t}{[t^2 - s^2]^{1/2}} = \frac{t}{t\left[1 - \left(\dfrac{s}{t}\right)^2\right]^{1/2}} = \frac{1}{(1 - v^2)^{1/2}} = \frac{E}{m} \tag{1.24}$$

の関係を知っているだろう。ここで m は粒子の質量である。(1.24) 式は一定の速さで進む粒子の単位質量当たりのエネルギーである。

異議あり： 冗談じゃない。自由浮遊系からみると、自由粒子が等速で直線に沿って運動することは誰だって知っている。こうした運動が続くとき、$v = s/t$ にのみ依存するような量はすべて運動の定数である。たとえば、v^{12} も考えられるが、これは確かにエネルギーの正しい表現ではない。

回答： 回答：あなたはだいたいにおいて正しい。実際、速度 $v = s/t$ のあらゆる関数は平坦時空における自由粒子の特別な場合に対する定数である。そして v が一定ならば (1.24) 式でみたように t/τ もそうである。この導出における優先順位に気づいてほしい。つまり、極値的加齢の原理は優先順位として最も高く、エネルギーに対する表現はこの原理から出てくる。v が一定であるため、一定である量のうち、極値的加齢の原理から $t/\tau = E/m$ が第一に選び出される（以下の節で似たような説明から運動の定数として運動量の相対論的表現を選び出す）。第 3 章では、新たに曲がった時空中のエネルギーの表現をもっと一般的に示す。速度が一定でない場合、でもまだ依然としてエネルギーに対する一般的な表現は正しく、運動の定数である。したがって平坦時空で E/m の我々の式は、重力中心近くの曲がった時空で、粒子のエネルギーの導出に備えたリハーサルになっている。

粒子が速さを変えるとエネルギーも変わる。この場合は瞬間的な速さが意味を持ち、微分の記法を使うべきである。図 1 の一組の発光が座標値の増加量 dt, ds と腕時計時間の増加量 $d\tau$ だけ離れているとする。その場合 E/m の式は

特殊相対論における粒子エネルギー

$$\frac{E}{m} = \frac{dt}{d\tau} \tag{1.25}$$

になる。これまで、方程式の中で E 単独でなく、比 E/m を使っている。なぜか？ 比を使うことによって 2 つの重要な原理を強調しているのだ。(1) (1.24) 式と (1.25) 式のような式の片方の辺には事象間の時空における関係式だけが現れており、これらの表現を決めるのは時空幾何学であって、物質にある何か奇妙な性質ではないことが思い起こされる。(2) 比 E/m には単位がない。したがって、これらの式を誰が使っても、E と m の単位が同じである限り、単位の選択には大きな自由度がある。(1.25) 式の分子と分母の単位はキログラムであるかもしれないし、陽子の質量、またはメガ電子ボルトかもしれない。エネルギーに対してジュール、質量に対してキログラムのような通常の単位を使おうとするなら、変換因子 c^2 をエネルギーと質量の単純な関係式につけなければならない：

$$\frac{E_{\text{joules}}}{m_{\text{kg}}c^2} = \frac{dt}{d\tau} \tag{1.26}$$

静止エネルギー：有名な公式

それでは粒子が静止している基準系から粒子を眺めよう。 この系では、発光間の距離 s は 0 である。(1.1) 式から、$s = 0$ のとき、座標時間 t と腕時計時間 τ が厳密に同じ値であることがわかる。よって、静止した粒子のとき、(1.26) 式は物理の中で最も有名な式になる：

$$E_{\text{joules rest}} = m_{\text{kg}}c^2 \tag{1.27}$$

(1.27) 式が粒子の静止エネルギーを表していることに注意する。運動している粒子のエネルギーは (1.26) 式で与えられる。

(1.27) 式において、c の**定義**値は 2.99792458×10^8 メートル毎秒である。E の単位がエルグ、m がグラム、c が センチメートル/秒であっても同じ形の式になる。

より詳しい説明： 平坦時空でのエネルギー：*Spacetime Physics,* Chapter 7, Momenergy.

1.6 特殊相対論における運動量

計量に加え極値的加齢の原理から運動量の式が得られる。

運動量の相対論的表現は、エネルギーの相対論的表現を得るのに使った方法と似たやり方で求められる。図 2, 図 3 と似た図を描くが、しかし今回は発光の時間 t を固定し、中間の場所 s を左右に動かし、最初の発光から 3 番目までの腕時計時刻の総和が極値をとるようにする（この章の終わりの練習問題で運動量を導出する）。結果は自由粒子の 2 番目の運動の定数になる：

$$\frac{s}{\tau} = \frac{s}{[t^2 - s^2]^{1/2}} = \frac{s/t}{[1-(s/t)^2]^{1/2}} = \frac{v}{(1-v^2)^{1/2}} = \frac{p}{m} \tag{1.28}$$

(1.28) 式は一定の速さで動いている粒子に対する単位質量当たりの運動量である。粒子の速さが変われば、再び微分の表記を使う：

特殊相対論における粒子の運動量

$$\frac{p}{m} = \frac{ds}{d\tau} \tag{1.29}$$

(1.29) 式は、腕時計時間の増加 $d\tau$ がニュートンの「絶対時間」の経過 dt になっていることを除いて、ニュートンの非相対論的力学と同じ形である。

より詳しい説明：　平坦時空での運動量：*Spacetime Physics,* Chapter 7, Momenergy.

1.7　相対論における質量

誰が測定しても石の質量は同じになる。

質量とエネルギー、運動量の間の重要な関係はエネルギーと運動量の新しい表現と計量から得られる。動いている石が近い空間距離 ds と時間 dt 離れて 2 回発光するとしよう。(1.1) 式から腕時計時間の増加 $d\tau$ がわかる：

エネルギーと運動量から質量を求める。

$$(d\tau)^2 = (dt)^2 - (ds)^2 \tag{1.30}$$

両辺を $d\tau^2$ で割って m^2 をかけると

$$m^2 = m^2\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - m^2\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 = \left(m\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(m\frac{ds}{d\tau}\right)^2 \tag{1.31}$$

が得られる。または (1.25) 式と (1.29) 式を代入すると

エネルギー（運動量も）は観測者が変わると、変わることがある。

$$m^2 = E^2 - p^2 \tag{1.32}$$

が得られる。(1.32) 式では、質量とエネルギー、運動量がすべて同じ単位、例えばキログラムや電子ボルトのような同じ単位で表わされている。通常の単位ではもっと複雑な形をとる：

$$(mc^2)^2 = E^2_{\rm conv} - p^2_{\rm conv}c^2 \tag{1.33}$$

添え字 “conv” は「通常の単位」を表す。

(1.32) 式と (1.33) 式は 特殊相対論の中心となる式である。一様な相対運動をする別々の系で測ると、粒子エネルギー E の値はふつうそれぞれ異なり、粒子の運動量の値も異なる。しかしどんな自由浮遊系でもこれらの量を使えば、基準系によらない質量 m の値を決めることができる。(1.1) 式では腕時計で記録される $d\tau$ が基準系によらない不変量であったように、粒子の質量 m は慣性系によらない不変量なのだ。

... しかし、質量はあらゆる観測者に対して同じ値をとる不変量である。

(1.32) 式で定義される、カギや自動車、コーヒーカップの質量は特殊相対論と一般相対論の探求を通じて使うものである。このような**テスト粒子**は近傍の時空構造に反応はするが、小さすぎて時空構造に影響を与えない（それに対して、惑星や星、ブラックホールなどの大きな質量は周辺の時空に影響を与える）。我々はどこにいても、局所的な自由浮遊系を登っており (1.8 節)、テスト粒子の質量 m を測るために特殊相対論の式 (1.32) や他の標準的な方法を使うことができる。

より詳しい説明:　平坦時空での運動量：*Spacetime Physics,* Chapter 7, Momenergy.

速度で変わらない質量

光速より速く動く物体は存在しないという事実を「速さとともに質量が増加する」と「説明」することがある。この解釈には何の問題もない。しかしこれは実際には何を意味するのだろうか。観測者が高速で動く石に乗って、石の粒子数を数えても数は変わらないし、個々の原子や原子間の束縛エネルギーにもどんな変化も起きない。本書の視点は、質量が不変量であり、(1.32) 式または (1.33) 式を使って質量を計算すると、すべての自由浮遊系で同じ値になるというものである。相対論において、不変量は金科玉条である。このような貴重なものを捨ててはならない。この問題について詳しくは *Spacetime Physics,* **Dialog: Use and Abuse of the Concept of Mass,** pp. 246–251 を見よ。

1.8　自由浮遊系は局所的である

自由浮遊（慣性）系では空間と時間の広がりに制限がある。

自由浮遊（慣性）系は特殊相対論が自然を記述する舞台である。慣性系は、静止した状態から放された自由粒子はそのままで、速度をつけて放された粒子の速度は大きさと方向が一定のままになる系である。特殊相対論の力が発揮されるのは厳密に一つの系の中や、互いに一様な相対運動をし、重なり合う慣性系の集合の一つ一つの中だけである。

局所的自由浮遊系の制限から一般相対論の必要性を知る。

万が一宇宙を 一つの自由浮遊（慣性）系で覆うことができたなら、特殊相対論は宇宙を記述でき、一般相対論は不必要であったであろう。しかし、典型的な慣性系は空間と時間の限られた領域でしか使えないので、一般相対論は絶対に必要である。慣性系は**局所的**であり、自由浮遊系は実現可能なものであり、例えば、以下の性質を満たすいろいろな「コンテナ」の内部と理想化できる：(1) 地球や太陽を軌道運動する推進力のない宇宙船　(2) ケーブルの切れたエレベータ　(3) 星間空間で推進力のない宇宙船。これらの自由浮遊系にしばし乗ってしまえば、重力の痕跡を見つけることができなくなる。

自由浮遊系は大き過ぎてはいけない。

確かにほとんど痕跡はない。我々が乗っている箱物は大き過ぎてはいけないし、粒子間の不可避な相対運動が測定できるほど長い時間落下してもいけない。なぜか？ 複数の テスト粒子を大きな空間に入れて大きく離しておくと、地球の非一様な重力場から別々に影響を受けるからだ、とニュートンの立場では言うであろう。例えば、いっしょに放された 2 つの粒子は地球の中心に向かって引かれるため、水平のまま落下する細長い車両の内側で粒子の運動を調べると、粒子は互いに近づき合う（図 4、左）のだが、それはテスト粒子間の重力とは何の関係もなく、重力は完全に無視できる。

別の例として、鉛直方向にかなり離れた 2 つのテスト粒子の落下を考える。2 つの粒子は鉛直方向に落下する細長い車両の中にあり、1 つ目の粒子の真上に 2 つ目の粒子が置か

エレベータの安全性

ケーブルがブチっと切れ、シャフトの中を急降下することがあるのだろうか。

これは常に乗客につきまとう最悪の不安であるが、専門家は心配いらないと言う。エレベータは 4 本から 8 本のケーブルで吊られているが、その 1 本 1 本がエレベータ室の重みに耐えられるようにできているのだ。実際にあった話だが、一度だけすべてのケーブルが切れてエレベータが自由落下したことがあった。第二次世界大戦中アメリカの爆撃機が誤ってエンパイアステートビル（ニューヨーク市）に衝突したときだ。飛行機の操縦士は死亡したが、エレベータの 1 人の乗客は助かった。

— *Good Housekeeping Magazine*, 1998 年 2 月号, p.142

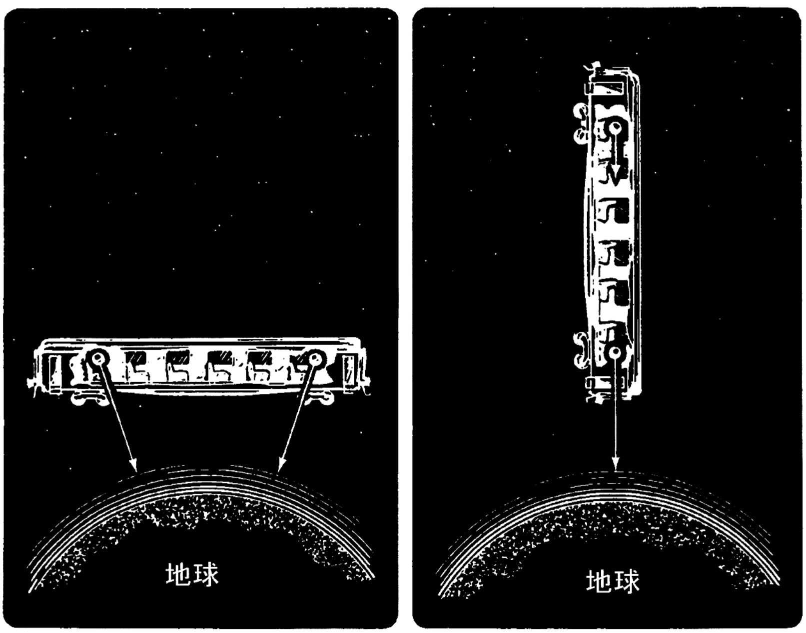


図 1.4　落下するアインシュタインの古風な車両。左：水平方向。右：垂直方向。

れている（図 4、右）。鉛直方向に離れた 2 つの粒子に作用する地球方向の引力はニュートンの場合と同じである。しかしながら地球近くの粒子は強く引かれるため、間隔は徐々に広がっていき、車両の中で観測すると、2 つの粒子はどんどん離れていく。結論：大きな箱物の中は自由浮遊系ではない。

図 4 のどちらの車両の乗客もテスト粒子が互いに加速して近づいているか、または離れているかを知ることができる。これらの相対運動には**潮汐加速度**という名がつけられている。その理由は、月の重力場が地球の海の満ち引きの原因となっているのだが、それと同

じ重力場の非一様性から相対運動が生じているためである。

我々は自由浮遊系で簡単な形の運動方程式を手に入れたい。つまり、外的要因によって生じる相対加速度をすべて消したいのだ。「消す」という言葉の意味は、非一様重力の効果を検出精度以下に抑え、粒子速度の測定値に影響が及ばないようにするということだ。問題の解決のために部屋を十分小さくする。小さい部屋とは何のことだろう？ 部屋の至る所に置いた物体に生じる相対運動が小さいということだ。

自由浮遊系を維持するために時間と空間を狭める。

どんな精度が設定されても相対運動を検出できる測定器を用意する。しかしどんな精度でも、実験時間内に相対運動が検出できないような小さい部屋をいつでも作ることができる。また、部屋を小さくする代わりに、相対運動が検出できないように実験時間を短縮することもできる。たとえば、地上の高エネルギー加速器で作られた高速の粒子は、典型的な実験で行われているような数メートルの長さを、地球の重力による影響が無視できる非常に短い時間で通過している。結論：地上で静止している研究室系は、これらの実験を分析する目的に対して実質上自由浮遊系と考えても全く問題ない。

空間と時間はともに自由浮遊系の大きさを限るための対象となる。したがって、基準系は測定機器の精度に応じて、時空の限られた領域でのみ自由浮遊系である。

自由浮遊系の中でそれ自身をテストする。

観測者は空間全体で静止状態から粒子を放し、実験時間内に止まったままかどうかを調べることによって自由落下系であるかどうかを検証する。系の内部全体にわたって自由浮遊系かどうかを調べる。観測者は外を見る必要はないし、部屋の外で行われる測定を気にする必要もない。自由浮遊系が「局所的」なのは、それが時間と空間の中で制限を受けているからであり、自由浮遊の性質がその中で局所的に決められているためでもある。

「重力」を取り除く一つの方法は高い場所からトランポリンに向かって落下することである。つまり局所的自由浮遊系はいつも身近にあるのだ。どのように捻じっても、どのように回転しても、自由浮遊系を制限するテスト粒子の相対加速度を消し去ることはできない。これらの相対加速度は時空曲率の重要な指標であり、特殊相対論の限界にたどり着いているという警告信号として点滅しているのである。

一般相対論では自由浮遊系は 1 つでは足りない。

地球や太陽、中性子星の付近で大きく離れた事象、一つの自由浮遊系で覆うことのできないほど離れた事象をどうやったら分析できるのであろう。たとえば、数年の周期で太陽を完全に取り囲む軌道上にある小惑星の運動をどうやって記述すればよいのだろうか。小惑星はいくつもの自由浮遊系を渡り歩くのだが、一つの自由浮遊系ではたどることができない。特殊相対論は限界に達しているのだ。一つの自由浮遊系を渡り歩いて運動を正確に記述するために、我々は重力の理論である一般相対性理論に進まなければならない（第 2 章で調べることになる）。

より詳しい説明: *Spacetime Physics,* Chapter 2, Floating Free と Chapter 9, Gravity: Curved Spacetime in Action.

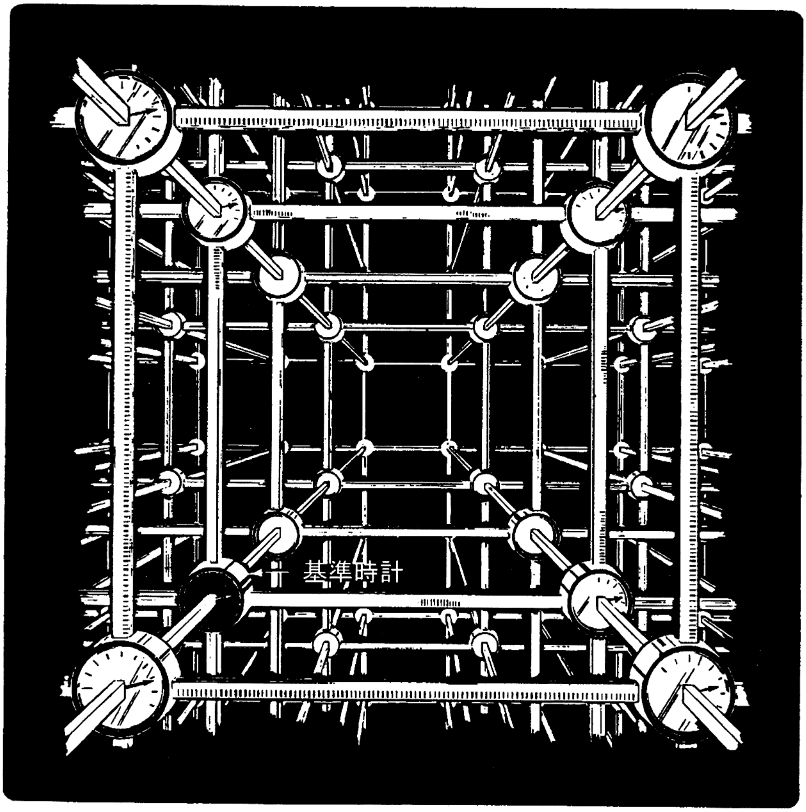


図 1.5 メートル尺と時計の格子。

1.9 観測者

数万もの局所的目撃者

時計の格子を使って各事象を局所的に記録せよ。

我々は 原理的にどのようにして時間と空間中の事象を記録したらよいのだろうか。自然は光速という、破ることのできない速さの制限を信号に課す。この制限は遠く離れた事象を記録するときに大きな問題を引き起こす。遠くで起きた事象は、非常に長い時間が経たなければ見ることができないからである。光速による遅延を避けるため、事象のすぐ隣に置いた装置を使って事象を検出する計画を我々はたてる。事象検出器を以下のように空間に配置する。メートル尺と時計をジャングルジムのように組み立てたものを考える（図5)。格子の交差点に時計をおく。時計はすべて同じもので光進時メートルで時間を測る。

格子の時計を合わせよ。

これらの時計の 刻む時間は同じでなければならない。すなわち、これらの系の時計は**同期**している（合っている）必要がある。時計合わせの方法はいくらでもある。その一例として、時計を１つ選び**基準時計**とする。基準時計は午前零時に**同期光**を全方向に放つ。同期光に先立って、他の時計は止められており、基準時計からの直線距離（メートル）分だけ進ませてある。そして各時計は基準の光を受け取ったとき動き始める。こうしたとき、格子上の時計は同期化されたという。

事象の空間と時間の位置の測定

同期化された時計の格子を使って、事象が起きた位置と時刻を決める。事象の空間的な位置は最も近い時計の位置とし、時刻は時計に記録された値である。最も近い時計の位置は基準時計から北、東、上の３つの方向に沿って測られる。そして、時空における事象の位置は、事象から最も近い時計の位置を示す３つの数字とその時計によって記録された時刻を示す１つの数字を合わせた計４つからなる。

最も近い時計の位置で事象の位置を決める。メートル尺で作られている格子では、事象の位置は何分の１メートルかは不正確になるだろう。位置にもっと正確性を求めなければならないのであれば、格子間隔を１センチメートルや１ミリメートルにするのが適当であろう。地球の人工衛星を追跡するためには100メートルの格子間隔でも十分かもしれない。

先見ある実験者が据え付ける格子時計は**記録時計**になるだろう。各時計は事象（光や粒子の衝突や通過）が起きたことを検出することができる。各時刻は事象の性質、時刻、位置とともに記憶される。そして、すべての時計の記憶の読み出しが行われ、後に解析本部で分析される。

「観測者」とは系の記録時計すべてのことである。

相対論では **観測者** についてよく口にする。この観測者はどこにいるのだろうか。ある１つの場所にいるのか、それともあらゆる場所にいるのか。答え：観測者という言葉は自由浮遊系の記録時計全体のことを短縮して使っているのだ。我々はこれから「観測者はこれこれを測定した」という使い方をする。

地球や太陽、中性子星、ブラックホールの近くの格子では何が起きるのだろうか。孤立した引力中心が１つ存在して、我々はそこから遠く離れているとする。星から離れたところから格子を広げることには問題はない。このような広がった遠方格子は一つの自由浮遊系となることができる。そして、一般相対論を勉強すると**遠方観測者**のことをよく口にするようになる。

遠方格子を地球やブラックホール近くまで広げると自由浮遊系にならない。

しかし、星がどんな構造をしていても遠方格子を星の表面に向かって拡大していくことには問題がある。中心近くで静止状態から放された自由粒子は遠方格子に対して静止したままではいられない。もはや一つの自由浮遊系では運動を単純に記述することはできない。

地球やブラックホールの近くでは局所系がたくさん必要となる。

重力中心の近くで運動を記述するためには、地球やブラックホールの周りをすべて覆い尽くす、一つの大域的な自由浮遊系をあきらめなければならない。その代わり大域的領域のほんの一部だけを覆う、いくつもの局所系に置き換えよう。全世界地図はいくつかの小さな地図が集まってできている。局所的な地図は実質的に平坦と考えてもよいくらい十分

小さな地表の一部を描きだしている。こうした小さな地図が、世界地図として合わさって地球の全球面を正しく記述することができるのだ。一枚の大きく平坦な地図では地球全体を記述することは不可能な作業である。回転していない地球やブラックホールの近くの時空を、個々の局所的な自由浮遊系に結びつける作業は第 2 章のシュワルツシルト計量 (Schwarzschild metric) によって行われる。シュワルツシルト計量は一つの自由浮遊系の制限を取り除き、曲がった時空へと導く。

より詳しい説明： *Spacetime Physics,* Chapter 2, Section 2.7, Observer.

1.10 まとめ

2 つの事象間の腕時計時間 τ は一つの事象から別の事象へ一様に移動する腕時計で記録される時間であるが、τ は自由浮遊 (慣性) 系における事象の空間間隔 s および時間差 t とある関係式によって結ばれている。その関係式は、同じ単位で測った空間と時間を使って

$$\tau^2 = t^2 - s^2 \tag{1.1}$$

によって与えられる。腕時計時間 τ は不変量であり、いろんな慣性系で測定したとき、t と s の値が違っていても τ の値は同じである。(1.1) 式は計量の一例である。

初めの事象と終わりの事象を通る可能な道筋すべてのうちで、自由粒子の道筋は、腕時計時間が極値をとるものである。これを極値的加齢の原理と呼ぶ。

計量と極値的加齢の原理から、自由粒子の 2 つの運動の定数を得ることができる。第一の運動の定数は単位質量当たりのエネルギー E/m である：

$$\frac{E}{m} = \frac{dt}{d\tau} \tag{1.25}$$

二つ目の運動の定数は単位質量当たりの運動量 p/m である：

$$\frac{p}{m} = \frac{ds}{d\tau} \tag{1.29}$$

特殊相対論の時空の舞台は自由浮遊（慣性）系である。そこでは静止した自由テスト粒子は静止したままであり、運動している自由テスト粒子は運動を変えない。自由浮遊系を設置できれば、その時空領域は平坦であると言う。

原理的に自由浮遊系には同期した記録時計の格子を置くことができる。あらゆる事象の位置と時間は、最も近い格子時計の位置とそこで記録された時間とする。観測者は基準系のこのような記録時計すべての集合である。

ほとんどの時空は空間と時間の限られた領域でのみ平坦である。系が慣性ではない（つまり時空の領域が平坦ではない）ことの証拠は自由テスト粒子間の相対加速度（「潮汐加速度」）にある。潮汐加速度が実験に影響を及ぼすなら、時空は曲がっていると言い、特

殊相対論ではこの実験を正しく記述できない。こうした場合、一般相対論、重力理論を使わなければならない。一般相対論は時間と空間の領域が大きく広がりすぎて特殊相対論では扱えないような事象間の関係を正しく記述することができる。

1.11 特殊相対論での読み物

Spacetime Physics, Introduction to Special Relativity, Second Edition, Edwin F. Taylor, John Archibald Wheeler, W. H. Freeman and Co., New York, 1992, ISBN 0-7167-2327-1. 我々自身の本。参照図書として第1章のいくつかの節の終わりやこの本の至る所で引用されている。

Special Relativity, A.P. French, W. W. Norton & Co., New York, 1968. 実験と観測に基づく親切な入門書。(日本語訳:『MIT 物理 特殊相対性理論』平松 惇訳、培風館)

A Traveler's Guide to Spacetime, An Introduction to the Special Theory of Relativity, Thomas A. Moore, McGraw-Hill, Inc., New York, 1995, ISBN 0-07-043027-6. 熟練した専門家による丁寧な説明。

Flat and Curved Space-Times, George F. R. Ellis, Ruth M. Williams, Clarendon Press, Oxford, 1988, ISBN 0-19-851169-8. 特殊相対論についての情報が盛り沢山の視覚的な旅行の後に続き、曲がった時空の説明がある。この本については本書の終わりの「一般相対論の読み物」を見よ。

Space and Time in Special Relativity, N. David Mermin, Waveland Press, Inc, Prospect Hights, IL, 1989, ISBN 0-8813-420-0. 厳密に書かれているが、少し風変わりなところもある。

Understanding Relativity: A Simplified Approach to Einstein's Theories, Leo Satori, University of California Press, Berkeley, 1996, ISBN 0-520-20029-2. 親切で完全。

Relativity, The Special and General Theory, Albert Einstein, Crown Publishers, 1961, ISBN 0-517-025302. アインシュタイン自身による一般向けの説明。原書は1916年に出版された。物理の深みや人間味のある視点が味わえる。それに、スタイルは古いがそれなりの力強さが味わえる。原本は1916年に出版された。(類書の日本語訳:『特殊および一般相対性理論について』 金子務訳、白揚社)

Relativity Visualized, Lewis Carroll Epstein, Insight Press, San Francisco, 1997, ISBN 0-953218-05-X. 特殊相対論と一般相対論について、楽しく趣向の変わった表現方法を用いている。主に図とグラフィックで表されている。書店で、または \$19.95 に手数料 \$2 を Insight Press 614 Vermont Street, San Francisco に送れば手に入る。

歴史的興味について

Relativity and Its Roots, Banesh Hoffmann, Scientific American Books, New York, 1983, ISBN 0-7167-1510-4. アインシュタインの共同研究者の一人による相対論の歴史。

The Principle of Relativity, A. Einstein, H. A. Lorentz, H. Weyl, H. Minkowski, Dover Publications, Inc., New York, 1952, Standard Book Number 486-60081-5. 数多い論文の翻訳。アインシュタインの特殊相対論の論文の最近の翻訳については、次を参照。(日本では、アインシュタインの論文については、『アインシュタイン選集 1〜3』(共立出版) が発行されている。また、関連論文については、『(物理学古典論文叢書　8) 相対論』(東海大学出版会) がある。)

Albert Einstein's Special Theory of Relativity: Emergence(1905) and Early Interpretation(1905-1911), Arthur I. Miller, Addison-Wesley Publishing Co., Inc., 1981, ISBN 0-201-04680-6. アインシュタインの特殊相対論の原論文 "On the Electrodynamics of Moving Bodies," の歴史的分析。書かれた背景、科学界での反応を調べている。論文の現代的で正確な翻訳も載っている。(類書の日本語訳:『(岩波文庫) 相対性理論』(内山 龍雄訳、岩波書店))

1.12 参照文献

初めの引用:雑誌 *Life* 編集者 Willam Miller の個人的追憶 1955 年 5 月 2 日号。*The Quotable Einstein,* Alice Calaprice 編, Princeton University Press, 1996, 199 ページ。

第 1 章の練習問題

1. 空間的間隔 I

2 つの爆竹が研究室で 3 年の間隔を空けて、同じ場所で爆発した。3 年というのは研究室の時計で測った時間である。

A. ロケットの中でこれらの事象の時間差が 5 年であるとき、空間距離はいくらか。

B. ロケットと実験室系の間の相対速度はいくらか。

2. 空間的間隔 II

ある実験室系で、2 つの爆竹が 2 年の時間差と 5 光年の空間距離で爆発した。これらの量は実験室系で静止した測定器で測られている。あるロケットではこの爆発が同時に起きたと観測した。ロケットで測定した距離はいくらになるか。

3. 超宇宙線

山梨県明野村には 100 平方キロメートルにわたって明野広域空気シャワーアレイ (AGASA:Akeno Giant Air Shower Array) が設置されている。そこでは、宇宙線が大気中でつくる粒子シャワーから間接的に宇宙線のエネルギーを測定している。このアレイは 10^{20} 電子ボルトほどのエネルギーをもつ宇宙線粒子を検出している。

A. 公式のテニスボールの質量は 57 グラムである。このテニスボールに 10^{20} 電子ボルトの運動エネルギーを与えると、速さはどれくらいになるのだろうか。メートル毎秒で答えよ。(ヒント：まずニュートン力学で計算してみよ)

B. 研究者は宇宙線エネルギーの上限を発見することができていない。建設中のピエール・オージェ宇宙線観測所では、北半球のアメリカのユタと南半球のアルゼンチンに検出器が各々 3000 平方キロメートルにわたって設置される。この新しい検出器が、これまで観測されたものの 10 倍のエネルギー、10^{21} 電子ボルトの宇宙線陽子を検出したとする。陽子が我々の銀河を横切ったとすると、その陽子の腕時計時間でどれだけの時間がかかるか。銀河の直径を 10^5 光年とせよ。答えを秒で表せ。

4. 質量とエネルギーの変換

A. 100W 電球は 1 年でどのくらいの質量を放出するか。

B. 全速力で自転車のペダルをこぐと、有効な力として 1/2 馬力を出せる（1 馬力は 746W である)。人体の効率は 25% である。つまり食物の 25% を有効な仕事に変えることができる。質量の 1kg をエネルギーとして失うためには自転車をどれくらい長くこがなければならないか。年の単位で答えよ。(変換因子は巻末公式一覧ある）減量ジムはどうやったら経営を続けられるのか。

C. 水素 1 キログラムが酸素 8 キログラムと化学反応して水になると、10^8 ジュールのエネルギーが放出される。優れた化学天秤は質量の 10^8 分の 1 の変化を検出することができる。この反応において質量の変化の割合を検出するために十分なまたは不十分な精度は、この化学天秤の精度の何倍か。

5. 単位と変換

A. 静止質量が 0 でない粒子に対して、(光速との比としての）速さが

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{p}{E}$$

であることを示せ。

B. 光がそうであるように質量が 0 の場合、A で得られた速さ v はどんな値になるか。その値は予想通りだったか。

C. 加速器から出るビーム中の粒子の質量とエネルギーは、よく 10 億電子ボルト (GeV) の単位で表される。科学誌の論文ではこれらの実験で粒子の運動量を GeV/c で表す。説明せよ。

6. 光の圧力

光には質量がない。通常の単位の (1.33) 式を使って以下の質問に答えよ。

A. 手の上にのせた 1 g の物体の重さを感じることができる。黒い木片が定常的にレーザービームを吸収して、手にのせた物体と等しい力を生じた。レーザビームによって供給されるエネルギーはいくらか。ワット [W] の単位で答えよ。

B. A の問題の木片がレーザービームを吸収する。木片は発火するか。

7. 運動量の表現の導出

A. 1.6 節で述べた運動量の相対論的な式を導出せよ。図 2 と 3 と似たような図を描くこと。**ヒント：**9 ページから 10 ページのステップ 1 から 7 にしたがえ。だが t でなく s について導出せよ。

B. エネルギーの (1.26) 式と同じように、通常の単位で p を表せ。

第2章

曲がった世界

- 「時空の曲率」とは何のことか。
- どうやったらこの曲率を観測できるのか。
- 光は地球から離れると「疲労する」のか。
- 一般相対論が正しく表せるのはちっぽけな効果だけなのか。

この考察における私の目的は、決して一般相対論を最小限の公理に基づいてできるだけ簡単で論理的な体系として表すことではない。ここでの私の目標は、私たちが進もうとしてきた道筋が読者にとって心理的に自然なもので、仮定がもっともらしいと感じられるような方法でこの理論を明らかにすることである。

— アインシュタイン (Albert Einstein)

2.1 「距離」は幾何学を決める

点の間の距離の表を使って物体を記述せよ。事象の間隔の表を使って時空を記述せよ。

曲がった時空という馴染みない考えに初めて出会ったとき、単純な測定が意味を失ってしまうのではないかという恐れに悩まされる。波打つ海洋面上で揺れるボートに乗り、すばらしい彫刻が施された巨大な氷山にメートル尺を当てて測定する仕事に取り組むことを考えてみよう。

もし氷山がボートの形をしていれば、測り方は十分簡単になるだろう(図1)。海岸に引っ張ってきて、舟底を上に回し、表面のあちこちの要所に軽く釘を打ちつける。釘から釘までの距離を測定し記録し表面の形がはっきりわかるようにする。釘とそのすぐ近くの釘の間の距離が記入された表を使うだけで、その場に居合わせていない人でもボートの形を再現することができる。再現された形の精度は、釘を増やせばいくらでもよくなる。

釘と紐で形を再現する。

もっと大胆に、高くそびえる氷山にピトンを打ち込むことを考える。ピトンとは氷に登るときロープを止めるために使うスパイクのことである。ここでもピトン間の距離を測ることにより、氷山の幾何学が記述でき、その形が再現可能となる。

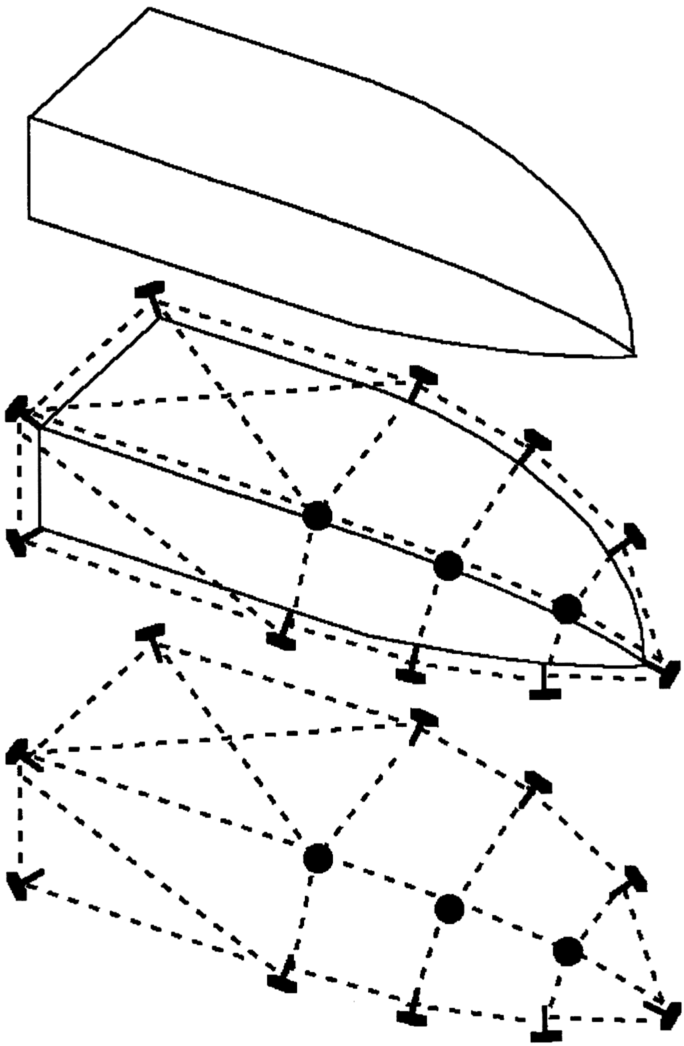


図 2.1　周囲を釘で打つことで再現されるひっくり返ったボートの形（上）。近接する釘の間を紐でつなぐ（中）。ボートの形は紐の線分の長さ（釘の間の距離）だけを使って再構成できる。釘と紐の数を増やし距離の表を増やせば、再現性は高まる。

だが、時空の点に印をつけるためにいったいどうやって釘を打ち込めばよいのだろうか。幸いなことに、アインシュタインが始めに強調したように、自然には時空に点を打つ方法が存在する。そこで起きたこと、例えば爆竹やフラッシュ光、衝突などを使えば点を特徴づけることができる。時空の点を事象と名づけることにする。

事象は時空に打ち付けられた釘である。

事象は時空の釘であり、ピトンであり、鋼鉄探査棒である。事象はどのように時空の幾何学を表すことができるのか？ 各事象の近くにある事象との「距離」を測るのだ。時空では事象間の「距離」とは時空間隔のことであった（第 1 章）。空間における点の間の距離の表は、時空における事象間の間隔に相当する。

間隔：時空の事象間距離

点の間の距離の表から 平面または曲面の空間的な幾何学を記述し、再現することができる。事象間の時空間隔の表から、特殊相対論による平坦な時空幾何または、一般相対論による曲がった時空幾何、つまり時空の形を記述し再現することができる。

事象と間隔から時空の「形」を再現する。

2.2 基準座標系は二次的なもの

実験室系とロケット系、2 つの系から平坦時空を異なった視点で眺めることができる。異なった基準座標系から曲がった時空を異なった視点で眺めることができる。

事象それ自身は、科学が掛かる釘である。事象の時空間距離によって、時空幾何である曲率が明らかになる。点と点の間の曲率は、それを記述する基準座標系が存在するかしないかに関係なく存在する。時空は座標系が全く使われなくてもそれ自身存在し、記述されるべきものである。

基準座標系があってもなくても曲率は存在する。

重力を及ぼしている星や惑星近くの同一の事象を記述するために、いろいろな座標系を使うことがあるだろうし、実際に使うことになるだろう。球対称の引力中心を軌道回転する推進力のない宇宙船の内部に座標系を張れるし、その引力中心に向かって突っ込んでいく宇宙船の内部にも張れるだろう。3 つ目の例は、同じ天体の外側でロケットエンジンの噴射による推進力で静止し続けるロケット内部の基準座標系である（星や惑星を中心とした静止球対称殻をつくって、その上に立っていればロケットの燃料を節約できる）。その他たくさんの座標系が存在する。一般相対論の中心的な考えは、基準座標系は基本ではなく、そのすべてが同等であるということだ。一般相対論を道具として使う人々は、服を着替える以上に座標系を取り替える。いろいろな座標系を使うと、各々それなりに曲がった時空幾何の特徴を際立たせることはできるのだが、どんな座標でも 1 つだけでは幾何の重要な特徴をすべて目立たせることはほとんど不可能だ。

特殊相対論では、異なった立場の座標系として研究室系とロケット系を使い、あらゆる基準座標系と独立に存在する平坦時空の特徴を浮き彫りする。同様に、星の周りの曲がった時空の特徴を見い出すために、様々な座標系を使う。曲がった時空、つまり曲がった幾何学はどんな座標系とも無関係に存在するため、目的に合わせて座標系を選ぶことで基準系の背後に隠された時空幾何学を把握することができる。

時空を調べる上で、いろいろな座標系はそれぞれ「優位な点」を提供する。


時空の「曲率」について話が続いているようだが、曲率とは何だ。


曲率という言葉は、3 次元空間の考えを 4 次元時空へ視覚的に拡張するときに、類推として使っている。旅行者は、初め平行であった「直線」の間の「距離」が進むにつれて徐々に増加または減少することに気づけば 3 次元でも 4 次元でも曲率を見つけられる。3 次元の空間では経路は近づいたり遠ざかったりする。地球の赤道付近で互いに近い二人の旅行者が北に向かって出発するとしよう。観測者は左右にそれてはいないのだが、北に進むにつれて、二人の距離が減少することに気づき、ついに北極にたどり着くと 0 になっている。この間隔のズレを使って、移動している球面が曲がっていることを示せる。同様に、4 次元時空では旅行者は近傍の自由粒子の世界線が平行からズレれていることに気づく。自由粒子の世界線は時空中の理想的な直線であり、ふつう**測地線**と呼ばれる。曲率は旅行者が測定できるものであり、時空の場所場所で変わる。

アインシュタイン：座標系は基本的ではない。

基準座標系を使うのは、我々の都合に合わせるためや、具体性をもたせるため、思考の節約のためである。基準座標系は自然にとって基本的なものではない。幾何こそが基本なのだ。その基本的な洞察を得るためにアインシュタインは 7 年もかかった。アインシュタインは特殊相対論から一般相対論への移行について数行で回想している：

> 落下物体の性質から重力加速度の独立性が次のように表現できるかもしれないと、ふと頭に浮かんだ：（小さい領域における）重力場中で、物体は無重力中にいるように振舞う。これは 1908 年のことだった。では、なぜ一般相対論の構築までさらに 7 年間かかったのか。その主な理由は、座標が測量的な意味を持つべきであるという考えから解放されることが容易ではなかったという事実にある。

2.3　自由浮遊系

我々にとって親しみのある快適な自由浮遊（慣性）系を使えば、ブラックホールの中心まで無傷で行ける。いや、ほとんど中心近くまで無傷で行ける。

ブラックホールの地平線の内側から脱出できない。

限りなく潰れた星 ブラックホールの周りの時空幾何を体験したいと思わないだろうか。一般相対論はどんな重い物質の塊の運命をも予測できる。一般相対論ではさらに、地平線（入ったら戻ることのできない半径。2.9 節で詳しく定義する）と呼ばれる場所よりもブラックホールに近づくと、どんなものでもブラックホールから脱出することができないことも予言する。光が物体から脱出できないのであれば、その物体は外側から黒く見えるだろう。というわけで「ブラックホール」という名がついた。

「平坦時空のカプセル」

推進力のない宇宙船が遠く離れたところで漂っていたのだが、そのうちブラックホールの中心に向けて落下し始めどんどん速くなっていくとき、当然その間宇宙船からブラックホールを観察できるであろう。宇宙船は曲がった時空を猛スピードで落下する「平坦時空のカプセル」となる。 これは他にもあったように自由浮遊系である。特殊相対論は縦横無尽にこのような系を使い、局所自由浮遊系の宇宙飛行士に対しても正しく自然を記述す

ブラックホールからの脱出？ ホーキング輻射

アインシュタイン方程式から、何ものもブラックホールの「地平線」から脱出できないことが予言できる。1973年ホーキング (Stephen Hawking) は量子力学を使って、それとは相容れない結論に至った。真空は何もない冷たい世界なのだが、量子力学ではそこで連続的に粒子反粒子が生成され、再結合することが数年前からわかってきていた。これらの過程は重要な観測から間接的に裏付けられていた。しかし冷たい平坦時空では生成消滅は決して直接実験にはかからない。そのため粒子対は「仮想粒子」という名が付いている。このような粒子反粒子対がブラックホールの地平線近くで生成されると、希に1つがブラックホールに呑み込まれ、もう一方が脱出することがある。脱出した粒子はいわゆる**ホーキング輻射**を形成する。脱出粒子のエネルギーはブラックホールから得られる。このエネルギー損失によってブラックホールは「蒸発」する。最終段階で超水素爆弾級の爆発が起きるかもしれない。だが、太陽質量の数倍のブラックホールが爆発するために必要な時間は宇宙年齢の10の何乗倍をかなり超える。そのためここではこのような輻射を無視する（229ページのボックスも見よ）。

る。曲がった時空を落下し、地平線を通過し、ブラックホールへと落ちているときでさえもである。カギや硬貨、コーヒーカップなどはこのような局所浮遊系の中で等速直線運動をする（図2では比較のため、空間3次元の曲がった経路の十分小さい部分が、まっすぐに見えることを説明している）。粒子の衝突や生成、消滅は特殊相対論における運動量エネルギーの保存にしたがっている。こんなにものごとが簡単に進んでよいものだろうか。

星の近くで避けられない相対加速度

ところが、ブラックホールに近づくにつれて、我々の系が自由浮遊系であることを確かめようとすると、系の大きさを徐々に狭めざるを得なくなる。2つのテスト粒子を地球付近で自由落下させると、相対加速度によってテスト粒子の間隔は変わっていく。したがって、自由落下している2つの粒子の存在する時空領域の大きさは制限を受ける（第1章1.8節）。頭の中で、地球上での経験をずっと重い球対称の物体、たとえば太陽や太陽に似た星、それに白色矮星、中性子星、ブラックホールなどの天体の外側の空間に適用してみよ。これらのコンパクトな球対称物体に近づけば近づくほどテスト粒子の相対加速度は大きくなり、ブラックホールの中心近くでは相対加速度は致命的になる。

相対加速度は**潮汐加速度**と呼ばれる。その理由は地球の重力加速度と、その逆に引っ張る月の加速度の差によって起きる潮の満ち引きと似ているからである（*Spacetime* の2.3節を見よ）。

ブラックホール近くの相対加速度の致命的効果

たとえば、ブラックホールに足から自由落下する実験用の宇宙物理学者の状況を考えよう。落下するにつれて、宇宙物理学者の体のいろいろな部分にいろんな加速度がかかる。彼の足は頭よりも中心方向に大きな加速度を受ける。頭と足を引き離す加速度の差（潮汐加速度）はブラックホールの中心に近づくにつれて強くなっていく。宇宙物理学者の体はすでにこのような極端に大きな潮汐加速度に耐えることはできないのだが、半径距離が0になると頭と足の間は強烈に引き伸ばされる。

しかしこれだけではない。頭と足の伸張と同時に、中心に向かう引力により宇宙物理学者の体の断面積は減少していく。潮汐加速度によって頭と足が引き伸ばされるとともに側

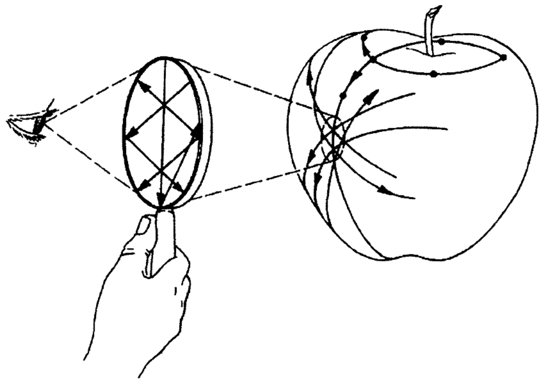


図 2.2 一般相対論の曲がった時空幾何学。ニュートンのりんごの表面を 2 次元の幾何学によって象徴させている。りんごの表面を這うアリがつけた跡は局所的にまっすぐ（測地的）で、時空中で自由粒子によってつけられた軌跡を象徴している。りんごの表面を虫眼鏡で拡大することで、軌跡を直線によって象徴化しているが、十分狭く限られた時空領域では、幾何学を理想的に平坦なものと考えることができる。領域を大きく広げると、曲率（りんごの場合は曲がった 2 次元空間であるが、実際の物理の世界では 4 次元時空である）を感じることができる。大きなスケールでは、もともと共通の点から広がっていた軌跡がそののち近づき、交差し、全く違った方向に離れていく。ニュートンの理論では、この効果は遠くの重い物体から作用する重力のために起きている。ここではりんごの柄によって象徴されている。アインシュタインにしたがうと、粒子は時空からまさに局所的な運動の指令を受けている。その指令は単純明解である：「まっすぐ進め。最もまっすぐな世界線（測地線）に可能な限りしたがえ」。物理は局所的である限り非常に単純である。時空が曲がっているという理由のためだけに、軌跡は広がり、集まり、交わる（「潮汐加速度」）。

面では圧縮される。中心からの距離が 0 に近づくと、横につぶれ縦に伸ばされる。この二つの致命的効果は、地球近くにある自由浮遊系の両端で静止状態から放されるテスト粒子間の相対運動を自然に拡張したものである（第 1 章、1.8 節）。

自由浮遊系はどれだけ小さければよいのか。

潮汐加速度に直面したとき、我々はブラックホールに落下する自由浮遊系をどうやって定義したらよいのだろうか。ブラックホールの中心では不可能だ。一般相対論では中心で潮汐加速度が無限大になることを予言する。しかし中心を除けば、地上付近で使った方法が使える（第 1 章の 1.8 節）。実験を行う時空領域に制限を課すのだ。中心のごく近くでは、自由浮遊系を定義すべき、特殊相対論を使うべき時空の局所的領域がますます小さく押さえつけられる。自由浮遊系はどのくらい小さければよいのか。一つの放射性原子核が検出可能な信号、たとえば高エネルギー閃光（「ガンマ線」）を放つ。原理的には基準座標系に原子核の大きさとガンマ線の放射時間程度の広がりをもたせることができる。もし重力的潮汐加速度がこの時空領域で原子核を「あまりにひどく」歪めなければ、特殊相対論

の法則はこのような座標系で原子核を正確に記述でき、この座標系はこの実験の目的において実質的に自由浮遊系である。

自由浮遊系に踏み込むと、我々が地上で常に経験する「重力」は消え去ってしまう。その後に何が残るのか？ 時空の曲率が残る。曲率って何だ？ 潮汐加速度以外の何ものでもない。曲率は潮汐加速度であり、潮汐加速度は曲率だ。ソーン (Kip Thorne) ははっきりと述べている：「アインシュタインとニュートンは時間と空間の性質について全く異なった視点をもっており、必ずしも自由浮遊系でない座標系でテスト粒子を互いに近づけたり遠ざけたりする要因に全く別の名前をつけた。アインシュタインは時空曲率と名づけ、ニュートンは潮汐加速度と名づけた。したがって時空曲率と潮汐加速度は別の言葉で表されてはいるが、正確に同じものでなければならない」(わずかに編集してある。原文は参照文献を見よ)

大域的な座標系の必要性

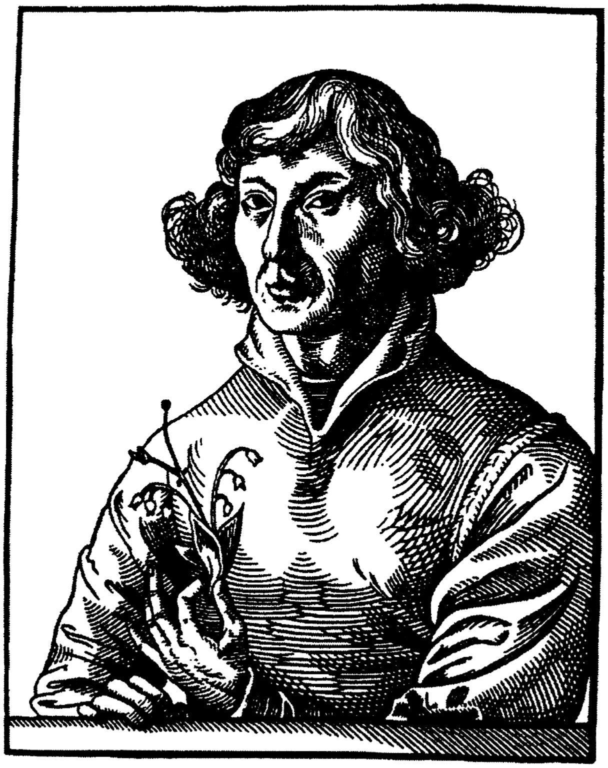
ブラックホールの自由浮遊系における制限の 1 つは テスト粒子に作用する潮汐加速度であり、それは半径 0 に向かうにつれて大きくなる。もう一つの制限は大きなスケールにおける潮汐加速度の帰結である。1 つの自由浮遊系の大きさでは、質量中心の両側で起きる 2 つの事象間の関係を記述するには不十分である。この 2 つの事象は、ブラックホールを 1 周する軌道上の物体によって別々の時刻に放たれた 2 つのフラッシュかもしれない。このように遠く離れた事象を関係づけるためには局所的な座標系でなく大域的な座標系を必要とする。シュワルツシルト (Karl Schwarzschild) は、自転していない球対称引力中心の周りで大域的な座標系の基礎をつくった。シュワルツシルト座標系は地球や太陽のようなゆっくり自転する天体、それにゆっくり自転する中性子星やブラックホールに対し、よい近似として使うことができる。ただしこの座標系にも制限はある。自由浮遊系とシュワルツシルトのような座標系（または他の座標系でもよい）を使った視点に立てば、星の周りの真空時空の幾何学を深く探ることができる。それではシュワルツシルトが使った座標系にとりかかろう。

2.4　r 座標：換算円周

中心にある罠を避けて半径を測る方法。

引力の球対称中心

物質は重力があるため、球対称の引力中心に集まるという不思議な性質がある。コペルニクス (Nicolaus Copernicus) は、地球はたくさんの重力中心からなる見かけの引力中心の一つに置き換えられるという洞察を信じた。見ればわかるように、地球や月、惑星、太陽、星は単純な球形をしている。これらの構造は中心で強く、表面近くでゆるく圧縮されている。しかし密度の変化は半径方向だけで起き、角度方向には起きない。このような構造は**球対称**という名に値する（厳密には、天体が回転していないときに限り、球対称という。太陽や惑星では回転率が十分小さいため、多くの観測で球対称からのズレは無視できる)。



コペルニクス（**Nicolaus Copernics**）ポーランドのトルンで **1473** 年 **2** 月 **19** 日に生まれ、**1543** 年 **5** 月 **24** 日にポーランドのフロンボークで没した。花は医学の古いシンボルである。コペルニクスは医学をパドゥアで学んだ。彼は常に貧しい人たちのために医療活動を行った。

科学者辞典による記述　コペルニクス以前の宇宙論では、たった一つの重力中心が知られていたのに対して、コペルニクス以降では物理的な宇宙は多重的な重力中心を必要とした。したがってコペルニクスは普遍的な重力への道を切り開いたのだ。彼は重力の概念の修正を提案した。それにしたがえば、重い物体はどこにあっても中心に向かう傾向がある。つまり、地球にある重い物体は地球の中心に、月にある重い物体は月の中心に、といったように。[コペルニクスの記述による]

> 「私としては重力が.... 各部分に備わっているある自然な性質に過ぎず、そのため球の形に集まることにより、統合して全体的にまとまった形になっているのだと思う。この傾向は太陽や月、他の明るい惑星にもあり、そのため、見た目が丸くなっていると信じてよいのだろう」



図 2.3 「宇宙船地球号」という名の測地線球。これはフロリダ州オーランドーのディズニーエプコットセンターのシンボルである。この球は直径 5 メートルで、その中には洞窟に住んでいた時代から現在までのコミュニケーションの歴史のハイライトを見せる乗物が入っている。ブラックホールを囲む球殻は透かし彫りの格子であり、ここに示したような面では覆われていない。©Disney Enterprises, Inc.

質量の分布が球対称に近づけば近づくほど、その周りの時空幾何は、1915 年にシュワルツシルトによって発見された一般相対論の方程式の単純ですばらしい解に一致する。シュワルツシルト解は、宇宙で孤立した球対称な物体の周りのどんな時空でも記述できる。

シュワルツシルトの単純な解

地球や星、ブラックホールの周りの「シュワルツシルト幾何」とはどのようなものなのか？ 最初から「何てこんなばかげた質問」を出すのか？ いったい誰が空間なんてものを見るんだい？ 我々が空間を見通すのだ。超高層ビルの骨組みを宇宙に持っていくか、または大きな球形の建造物であるフラーレンの骨組み（図 3）を空間に持ち出す。ちょうどこのフラーレン状の建造物のようなものを使って、空間がどのようなものかを調べる方法は以下のようにすればよい。

わかりやすくするため、ブラックホールが中心にあるとし、その質量は太陽と同じだとしよう。その周りに、棒で三角形の網目状に織り上げ、球殻を組み立てることを想像しよう（図3)。球殻は、局所自由浮遊系で使ったメートル尺と時計からなる格子の代わりとなるものである。球殻に時計を設置しよう。球殻のメートル尺と時計は事象を定める時空の座標系となる。

メートル尺と時計の球殻

球殻を「想像しよう」と言ったのは、鋼やタンタリウムやどんな現代的ですぐれた物質の強度でも内向きの引力に対してこのような構造を支えるのには不十分だからである。しかし、地球や月、星の表面は球殻の性質を持っている。我々は球殻の表面つまり地面を日常的に歩き回っている。こうした球殻がなくても、宇宙船はロケットエンジンを下方に噴射させることによって、球面上に止まったままでいられる。

半径を直接測ることはできない。

この格子殻の球面の大きさを どうやって定義すべきであろうか。中心からの距離を直接測定すべきなのか？ それは無理だろう。ここでは我々は球殻上に立っていると想像しよう。錘を「ひも」につけて垂らす。ところが、ブラックホールは、ひもであろうが、巻尺であろうが、鋼鉄ワイヤであろうが、どんな強さのものでも、無限大の引力によって容赦なく引きちぎる。地球や太陽には表面があるため、錘が直接中心まで届かないだけなのだ。

円周の測定値から半径を求める。

それでは、球殻の大きさを決めるために別の方法を試そう。球殻上から巻尺を垂れ下げる代わりに、巻尺を球殻の上に当ててそのまわりを測定しよう。こうして得られた距離を球の円周という。この円周を $2\pi = 6.283185...$ で割ると、もし空間が平坦ならば球の半径になるだろう。しかし今の場合空間は平坦ではない。この方法は、球殻の大きさを知るために最も有効な測定法として知られている。

この測定方法によって得られる球体の「半径」は、本当の半径でないにもかかわらず、**座標半径**という名が与えられている。我々はこの半径を、円周から得られた（換算された）ものということを心に留めておくために、**換算円周**とも呼ぶ：

$$\begin{aligned}\text{座標半径} &= r = \text{換算円周}\\ &= (\text{円周})/2\pi\\ &= r\ \text{座標}\end{aligned} \tag{2.1}$$

座標半径や換算円周という言葉は長ったらしいので、ふつう簡単に r 座標と呼び、記号 r で表す。r 座標は球の円周から計算される半径である。すべての球殻に r の値を記しておく。

想像上での話だが、ブラックホールを囲んで一つの球殻を造り、座標半径または換算円周 r を求めた後、内側に2番目の枠組を同じようにつくりその半径を求める。二つの球殻の円周を巻尺で測ることによって、内側の球の換算円周 r が初めの球殻よりも1キロメートル短いことがわかった。

同心球殻の間で直接測られる差は r の値の差よりも大きい。

それでは最後に外側の球面から錘を吊り下げて、内側の半径方向の本当の距離を初めて直接測ることにする。二つの球面間の半径方向の距離は1キロメートルだろうか。空間

が平坦ならば、確かにそうなるだろう。しかし、この場合平坦ではない。シュワルツシルト幾何学によると、二つの同心球面の間の半径方向を直接測ると、1 キロメートル以上になる。原理的に、重力と呼んでいる空間曲率の存在として簡単に挙げられる衝撃的な証拠は、ユークリッド幾何学の予想と食い違う半径の値である。このような食い違いを調べれば、ブラックホールの周りの空間がどのようになっているかを知ることができる。

太陽付近の小さな効果

太陽の周りに球殻を造っても、球殻が太陽表面の内側に行くことはできない。r 座標は約 695980 キロメートルの太陽表面以下の値をとれない。この内側の球殻の周りに、r 座標で 1 キロメートル大きな（695981 キロメートル）第二の球殻を建てることを想像しよう。この 2 つの球殻間の直接測られる距離は 1 キロメートルではなく、1 キロメートルよりも 2 ミリメートル大きいだろう。

どうやったら太陽と同じ質量の天体の外側にいながらその中心に近づくことができるのだろうか。白色矮星や中性子星は太陽とほぼ同じ質量なのだが、どちらもずっと小さい。したがって原理的には、星の外側にいながら、中心に近づけば近づく程、空間が平坦でないことのテストはより精度が上がっていく。空間曲率の効果は太陽表面よりも白色矮星や中性子星の表面近くでずっと大きくなる。

ブラックホール付近の大きな効果

では、太陽質量のブラックホールに戻ろう。ブラックホールに近づくと、白色矮星や中性子星の周りなど どこと比べても、平坦からのズレはかなり大きくなる。r 座標（換算円周）が 4 キロメートルの球面をつくろう。その外側の球面が r 座標で 5 キロメートルにあるとしよう。2 つの球面の周りを測定することで得られる 2 つの距離に対して、二つの球面の間で直接測られる半径距離は 1.723 キロメートルであり、ユークリッド幾何では 1 キロメートルである（53 ページの例題 2）。空間曲率のために、この位置の値はユークリッド幾何学の教科書から予想される値とは全く異なる。

直接測定した球殻の間の距離が r 座標の値よりも大きいのはなぜなんだ。これは物差しが重力的に引き伸ばされるか、または縮められるために起きているのか。

いいや。ここでの結果は測定器が無限に強い剛体でできているという仮定のもとで得られている。実際には強度に限界のある物差しでは上端を持てば重力でに引き伸ばされるであろう（または、下端を持っていれば縮められるであろう）。それでは、下の方から物差しを投げ上げ、その両端が二つの球殻に来たときに一時的に静止させることを考えよう。このとき、自由浮遊系で直接間隔を測ることができる。ただし、この場合でも物差しにはたらく潮汐力は存在する。物差しに沿って付けられたひずみ計によってこの伸びは計算して取り除くことができる。球殻の間隔を細かくとっていけば、伸びをどんな値よりも小さく抑えることができる。

私の質問から逃げてはいけない。質問に答えていないのではないか。私の質問は、球殻間の距離を直接測ったときの値が r 座標の値よりも大きいという事実はどこに原因があるのかということだ。この食い違いなぜ起きるのか。

難解な質問だ。基本的にこの食い違いの原因は、引力中心の質量のためにできた空間曲率だ。この引力中心の外側では時空構造は引き裂かれるのではなく、外に向け曲率は薄まり、

周りにあるすべての球殻、すべてのテスト粒子、全ての衛星に局所的な影響を与えながら伝わって行く。

2.5 重力赤方偏移

上昇する光は疲労して振動周期は大きくなる。地平線から上昇する光は無限大の周期になる。つまり存在し得ない。

ブラックホールの周りの（時空）曲率の中に時間があることを忘れてはいけない。「時間曲率」は、重力物体近くの球殻に取り付けられた時計から発せられたフラッシュの信号の振舞いを調べる以外には明らかにできない。この時計の針が動く毎に光を放射状に放つようにさせる。光が重力場を登って行くと、振動周期は大きくなっていく。

光が上に進むにつれて周期は大きくなる。

どんなふうに光の振動周期は大きくなるのか？ 光は周期毎（上下に波打つ毎）に、時計の刻みのように、時間を測定していると考えることができる。球殻時計が放ったとき、光の周期は短いとする。球殻観測者は発光時計の刻み方が速いと記録する。彼にとって一つ一つの刻みの時間間隔は短い。光が遠くの観測者にやっと届いたとき、その周期は長くなっている。受け取った時計の光信号はそれが送られたときよりもずっと間隔が伸びて観測される。ブラックホール間近にいる球殻観測者から放たれる光の周期はかなり増加する。時間の刻みが最も大きくなるのは、光が無限の高さまで登るときである。

発光体がブラックホールに近ければ近い程、受け取った光の周期は増加する。周期の増加を調べると曲率が空間だけでなく時間にもあること、つまり時空曲率の存在に気づくであろう。増加した周期から、球殻上で立っている観測者が測る 2 つの事象の時間差 dt_{shell} は、伝達していった事象の「遠方時間 dt」とは異なることもわかる。遠方時間とは重力源から離れた時計で記録される時間である。

重力赤方偏移

可視光で最も長い周期の光は赤である。遠方の観測者には時計によって放たれた光が発光地点での色よりも「赤く」見える。したがってこの効果は**重力赤方偏移**と呼ばれる。

ブラックホールの「黒さ」

なぜブラックホールは黒いのか？ なぜ光はブラックホールから脱出できないのか？ 結局、光は止まることができないからだ。すべての局所観測者は、光が上に進むとき光の速さを 1 と記録する。重力赤方偏移の結果は「脱出不可能」という言葉に意味を持たせることができる。地平線（脱出できるかどうかの境界の半径）の近くで発光されたどんな周期の光でも重力赤方偏移のために周期は非常に長くなる。時計が地平線に近くにあればあるほど、ブラックホールから遠いところへと上がると、周期もどんどん大きくなっていく。しかし周期が無限大の光なんて全く信号にはならない。検出することができないからだ。この場合、光はブラックホールの地平線近くからほとんど脱出することができない。極限的な場合として光は地平線の時計から上に 1 センチメートルですら出ることはできない（第 5 章の練習問題）。光は無限大の周期まで赤方偏移する。この結果はブラックホールの黒さを説明する（29 ページのボックスで述べた、量子効果であるホーキング輻射を除

いてブラックホールは黒い)。

重力赤方偏移は、ブラックホールまたはその他の重力源に対して静止している別々の半径にある時計の間で起きる。その他の赤方偏移として、2つの時計が互いに遠ざかるときに起きるドップラー効果が知られている。その例は、近傍の銀河から受け取る光の赤方偏移である。これは銀河が我々から後退しているために起きていると考えられている（曲がった膨張時空へドップラーシフトを一般化すると、宇宙が膨張するにつれて遠くの銀河からの光が赤くなることになる。プロジェクトG「フリードマン宇宙」を見よ)。地球の観測者に対して、地球を取り巻く重力ポテンシャルの井戸に光が落ち込むと、後退赤方偏移は原理的に**重力青方偏移**によって部分的に打ち消される。しかし日常生活では地球の重力青方偏移は無視できる（この章の終わりの練習問題を見よ)。

重力赤方偏移は相対運動によって起きるドップラー効果とは異なる。

我々は時空曲率の2つの帰結について述べてきた。隣接した球殻間の距離と球殻から外に脱出する光の周期の増加。これらの効果がどのように起きるか、そしてなぜブラックホールの地平線でこれらの効果が顕著になるかを調べると、時空の曲がりを記述する偉大で標準的なアインシュタイン方程式に対する解であるシュワルツシルト解をテストすることになる。これらの表現を簡単な式として書き下す前に、物体の質量の単位を、あまり直感的ではないキログラムではなく、距離を測るために使った幾何学単位、メートルまたはキロメートルで表す必要がある。

2.6 長さの単位での質量

すべてを幾何学的に扱いたければ、質量をメートルで測れ。

物体の質量 M を距離の単位、メートルまたはキロメートルで測ればどんな重力源の近くの時空でも最も簡単に記述できる。この節では、キログラムとメートルの間の変換係数を求めることに専念する。

質量をメートルで測る。

以前、時間と空間を同じ単位で測りたいと思ったとき（第1章2節)、変換係数 c を使った。キログラムからメートルへの変換はそんなに単純ではない。にもかかわらず、ここでも自然は変換係数を用意してくれる：物体間の重力相互作用を特徴付ける**普遍的重力定数** G と光速の組み合わせである。

ニュートンの重力理論は、二つの球対称質量 M と m の間の重力が質量の積に比例し、中心間の距離の2乗に反比例することを予言する：

$$F = \frac{GM_{\mathrm{kg}}m_{\mathrm{kg}}}{r^2} \qquad \boxed{\text{ニュートン}} \quad (2.2)$$

添え字によって、方程式中の質量 M_{kg} と m_{kg} がキログラムの単位であることを 示した。この方程式で G は「比例定数」であり、その数値は質量と距離が測られる単位によって変わる。歴史的には、質量の単位と距離の単位はその関係の理解なしに独立に発展してきた。G の数値は法則によって自然の中に組み込まれたわけではなく、人間の歴史的な偶然

G と c の数値：歴史的偶然

によって決まったものである。光速 c の数値が歴史的な偶然だけで決まったのと同じようなものである。質量をキログラム、距離をメートルで測ると G は実験で決まった値

$$G = 6.6726 \times 10^{-11} \frac{\text{メートル}^3}{\text{キログラム 秒}^2} \tag{2.3}$$

になる。G を光速の 2 乗 c^2 で割ると、通常の質量の単位キログラムから自然な幾何学単位メートルへの変換係数が得られる：

$$\begin{aligned} \frac{G}{c^2} &= \frac{6.6726 \times 10^{-11} \dfrac{\text{メートル}^3}{\text{キログラム 秒}^2}}{8.9876 \times 10^{16} \dfrac{\text{メートル}^2}{\text{秒}^2}} \\ &= 7.424 \times 10^{-28} \frac{\text{メートル}}{\text{キログラム}} \end{aligned} \tag{2.4}$$

さて、通常の単位キログラムで測られた質量 M_{kg} から長さの単位メートルの質量 M への変換は変換係数

$$M = \frac{G}{c^2} M_{\text{kg}} = \left(7.424 \times 10^{-28} \frac{\text{メートル}}{\text{キログラム}} \right) M_{\text{kg}} \tag{2.5}$$

質量をメートルの単位にするとすっきりとした方程式になる。

をかけることで行われる。どうして変換をするのか？ 第一に基本的に質量が幾何学と強く結び付いていることを 宣言する簡潔な方法だからだ。第二に方程式を乱雑にする係数 G, c^2 が取り除けるからだ。


待ってくれ。星や惑星は空間とは同じではない。どうあがこうと質量と距離を同じにすることはできない。したがって質量を距離の単位で測ることはできないはずだ。いったいどうやって質量をメートルの単位で測ろうというのか。


確かに、質量は距離と同じではない。時間も空間と同じではない。時計の刻みとメートル尺の長さは違う。それにもかかわらず、時間と空間を同じ単位で測ることを学んだ。例えば、距離の光年と時間の年または、距離のメートルと光進時メートル。空間と時間に同じ単位を使うと、人工的に生じた複雑さを取り除けたり、時空と呼んでいる統合体を認識するのに役立つ。時間の秒と空間のメートルの変換係数は光速 c である。

同じことが質量を長さの単位で測る場合にも当てはまる。質量と長さは同じではない。誰もそう言っていない。しかし両方を同じ単位で測ると幾何学的な洞察を得ることができる。星の質量をメートルで表しておくと、望めばこの数字を他のどの単位の量にも変換することができる。グラム、キログラムまたは太陽質量。キログラムからメートルへの変換では、変換係数は光速のべき乗だけではなく重力定数 G を含んでいる。キログラムからメートルへの変換係数は G/c^2 である。この変換の報酬は初めの方で得た報酬と似ている。自然がどのように機能しているかをより単純に知ることができ、より速く正確な予測にたどり着ける。質量、つまり重力は幾何学に昇華するのだ。

表 2.1　天体の質量

天体	キログラムで測った質量	質量の幾何学的な測定値	赤道半径
地球	5.9742×10^{24} キログラム	4.44×10^{-3} メートル または 0.444 センチメートル	6.371×10^{6} メートル または 6371 キロメートル
太陽	1.989×10^{30} キロメートル	1.477×10^{3} メートル または 1.477 キロメートル	6.960×10^{8} メートル または 696000 キロメートル
銀河系の中心の ブラックホール	5.2×10^{36} キログラム (2.6×10^{6} 太陽質量)	3.8×10^{9} メートル (参照文献を見よ)	
おとめ座銀河団の 中心のブラックホール	6×10^{39} キログラム (3×10^{9} 太陽質量)	4×10^{12} メートル	

なるほど、すばらしい。では先に進んで、キログラムの定義を公式国際基準であるメートルで表そう。1983 年以来、メートルの公式国際基準は 1/299 792 458 秒間に光の進む距離であり、それによって時間を距離に結び付けることができる。キログラムをメートルの幾何学単位で定義することによって時間にも結びつけることができる。他のすべての物理単位、エネルギー、運動量、電荷は長い間 時間と長さ、質量で定義されてきた。公式にキログラムを長さで定義することにより、したがって究極的には時間の単位で測ることにより、測定の世界を 1 つの量に統一することができる。

統一という考えは原理的によいのだが、実用という面では不満が残る。質量の測定は非常に正確であり、長さと時間の測定もそうである。しかしながら、質量と長さの変換係数 G/c^2 はそれらに相当する正確さでは決められていない。問題は G の値にある。これを測定するのは困難であり、せいぜい小数点 5 桁である。光速の精度が 9 桁あるのと比べてみたまえ。

どうして G の値が正確に決まるまで待たなければならないのか。なぜ変換係数 7.424×10^{-28} メートル/キログラムを厳密な定義として使って、長さの単位でキログラムを定義しないのか。

G が直ちに厳密な値で定義されない論理的な理由はない。しかしながら、利便性や接しやすさは論理的な明快さよりも、標準であるための重要な判断基準である。現在の質量の標準（特別な金属の塊）は正確な複製を作ることができる。科学や商業目的で使われるスケールの二次的な目盛り合わせの標準になる。この標準は、装置の整ったどんな実験室でも使える器具によって重力定数 G をかなり正確に測定する方法が発見されるまで置き換わらないだろう。

表 2.1 は、いくつかの天体の質量をキログラムとメートルの両方で表したものである。ここには、地球と太陽、それに我々の銀河中心で観測される活動を説明できると信じられている巨大な自転するブラックホール、その他の銀河のブラックホールがある（参照文献を見よ）。表からわかるように、相対論の幾何学的な言語を使うと星は小さくなる。

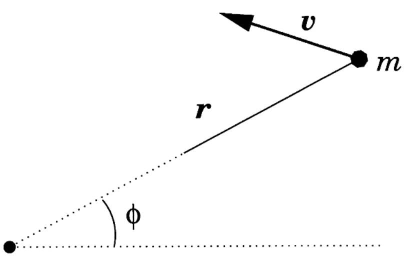


図 **2.4** 人工衛星が球対称物体を瞬間的な速度 v で軌道運動している。この軌道は平面内にあり、ずっと平面内に留まる。平面内の人工衛星の位置は **2** つの座標の値で一意的に指定される。我々は r 座標を選び、平面内の任意の初期の方向（図の中の水平な破線）を基準として測られる方位角 ϕ を選ぶ。中心に近い r 線も破線である。ブラックホールの場合、半径を直接調べることはできないからだ。

2.7 面内の衛星の運動

一旦平面内で運動し始めると、それ以降、平面内を運動し続ける。

軌道は平面上にある。

孤立した人工衛星 が重い球対称物体の周りを猛スピードで通り過ぎた。一目見れば、この運動が、衛星の位置と運動の方向、引力源の中心で決まる平面上にあることがわかる。我々はこれ以降、永遠に衛星の運動がこの平面内に留まることを知っている。なぜか？ 理由は簡単だ。対称性だ。平面から上にあがったり、下に落ちたりするような理由はなく、衛星はどちらかを選ぶ必要がない。もし面から上がったりすれば、球対称物体による作用以外の何らかの力が存在する証拠になってしまう。言い替えれば、衛星の環境が引力中心に対して球対称ではないことになる。

r と ϕ を使って衛星の位置を決める。

衛星は平面上を動くので、どの瞬間においても位置を決めるためには、2 つの量だけが必要である。1 つは r 座標であり、衛星が描く円の換算円周として採用する。もう 1 つの座標として引力中心の周りの平面で衛星の進行方向を決める**方位角** ϕ を選ぶ（図 4)。

球対称物体の周りを独立に軌道運動するすべての宇宙飛行士、すべての衛星、すべての光のパルスの運動は各々の平面内に留まるであろう。その平面内の位置は換算半径 r と方位角 ϕ によって記述される。平面内に留まっているおかげで、この本の残りで記述される物理的な事象の解析は容易になる。

2.8 平坦時空の計量

直交座標や極座標：どちらも平面時空の計量に対して使うことができる。

事象と間隔は普遍的な言語となる。

平坦時空幾何からシュワルツシルト幾何へ移るに当たって、何か不安を取り除いてくれ

るものはないだろうか？ 我々は何に頼っていったらよいのだろうか？ 何を信じたらよいのだろうか？ 答えは事象だ。事象は科学のすべてを掛ける現実的な釘だ（2.1 節）。そして、事象と事象の間で、基本的な関係、基本的な間隔を探す。例えば、爆竹の破裂と爆竹の破裂の 4 次元「距離」である。事象の組の間の時空間隔を探す。

近くに大きな質量がないとき、時空は平坦であると言う。平坦時空では 2 つの事象の腕時計時間 τ の式は普通の直交座標（デカルト座標）で書かれる。間隔が時間的（時間間隔が空間間隔よりも大きい）ならば、t と x, y で空間平面上の 2 つの事象間の間隔を記す。そのとき、事象間の腕時計時間の 2 乗は

$$\tau^2 = t^2 - x^2 - y^2 \qquad \boxed{\text{平坦時空}} \quad (2.6)$$

で表される。逆に、2 つの事象の間隔が空間的であれば、つまり間隔の空間部分が時間部分よりも大きければ、(2.6) 式の右辺の符号を逆にすることによって、右辺は正になる。この 2 乗の量をギリシャ文字 σ（シグマ）で表す：

時間的時空間隔

空間的時空間隔

$$\sigma^2 = -t^2 + x^2 + y^2 \qquad \boxed{\text{平坦時空}} \quad (2.7)$$

時空間隔について第 1 章の (1.1) 式と (1.8) 式には計量という名がついていた。(2.6) 式と (2.7) 式も計量である。計量は時空を（メートルの単位で）計測する方法を与える。

平坦な時空で 他のロケットとの相対的な線形運動を記述するにはデカルト座標がうってつけである。相対運動の方向を x, その垂直方向を y とする。しかし球対称な重力質量の周りの時空を記述するとき、デカルト直交系は大して便利でもない。ここで著しく目立つ方向は、引力中心に向ったり離れたりする半径方向であり、および中心を通る平面内で半径 r の円上の事象を表す角度 ϕ である。時間間隔の (2.6) 式を極座標で書き直そう。その結果、計量は

引力中心があるときは極座標を使うと便利である。

$$(d\tau)^2 = (dt)^2 - (dr)^2 - (rd\phi)^2 \qquad \boxed{\text{平坦時空}} \quad (2.8)$$

となる。42 ページのボックスでこの式の空間間隔の部分 $(dr)^2 + (rd\phi)^2$ の導出をした。

(2.8) 式は、特殊相対論の領域である平坦時空に対してのみ正しい。なぜなのか？ 足で立って見ようが、逆立ちして見ようが、日常世界は日常世界だ。同じように、時空の間隔がデカルト座標（直交座標）で表してあろうが、極座標（球座標）で表してあろうが、平坦時空は平坦だ。要するに、極座標系の原点に重い物体が置かれていないのである。

さて、地球や月、太陽、白色矮星、中性子星、ブラックホールのような自転していない天体の中心に球座標系の原点をおこう。このような物体の外側の時空幾何を調べよう。この新しい幾何学は 2.9 節のシュワルツシルト計量によって記述される。

極座標で表した平坦時空での空間間隔

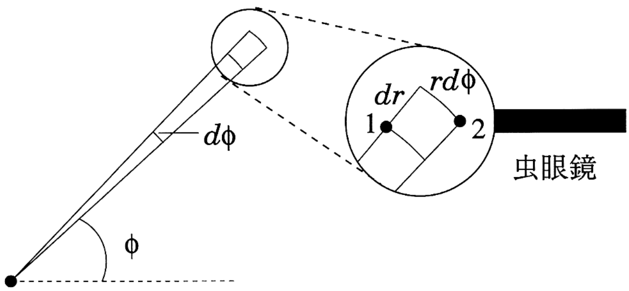


図 **2.5** 極座標における 2 点間の空間間隔。

互いに近い 2 つの事象の x, y 方向の座標間隔を dx, dy としよう。2 つの事象の空間間隔の 2 乗は

$$(\text{空間間隔})^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

である。

極座標で位置 dr, $rd\phi$ 離れた事象 1, 2 に対して同じような式を探そう。図 5 を見よ。

事象 1 と 2 を通る小さい弧を使って四角形を描こう。挿入図に拡大したものを示した。事象 1 と 2 の距離の 2 乗は、小さい四角形の隣合う辺の 2 乗の和として（近似的に）表される。完全な円にすると角度は 2π になり円周は $2\pi r$ になるだろう。この円周が換算円周 r のまさに定義の出発点であった。図に描かれた各弧の角度は $d\phi$ だけであり、全体の円のうち $(d\phi/2\pi)$ の割合でしかない。この円弧の長さは $2\pi r$ の $(d\phi/2\pi)$ 倍、または $rd\phi$ である。円弧は短いので直線とほぼ同じであり、球対称物体の周りの曲がった空間幾何学にそのまま使えるため、その論拠を詳しく述べているのである。しかし、dr についてはそうはいかない。同じ方位角にある 2 点で、r 座標が r と $r+dr$ あるものを考えよう。平坦な空間でだけこの 2 点間の距離は dr である。したがって、平坦幾何においてのみ、事象 1 と事象 2 の間の空間距離として

$$(\text{空間間隔})^2 = (dr)^2 + (rd\phi)^2$$

に資格が与えられる。この空間距離の 2 乗は平坦時空の 2 乗間隔の空間部分、(2.8) 式である。この導出は $d\phi$ が小さいことに依存しており、$rd\phi$ の円弧の部分が直線と区別できないほど小さくなければならない。

2.9　曲がった時空のシュワルツシルト計量

球対称大質量引力中心？ シュワルツシルト計量はその周りの時空を記述する。

平坦時空の平面内にある 2 つの時間的な事象の固有時を表す計量は

$$d\tau^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\phi^2 \qquad \boxed{\text{平坦時空}} \quad (2.9)$$

$r^2 d\phi^2$ で地球近傍の時空を記述してもまだ問題ない。

で与えられる。球対称で質量の大きな物体があるとき、その中心を通る平面内で近接する 2 つの事象に対して、この計量はどのように書き換えられるのだろうか。右辺の最後の項は、r 座標の選び方からわかるように何も変らない。r 座標は、$2\pi r$ が引力質量を中心とした円周の測定値になるように定義される。そのため換算円周と呼んでいる。全円周 $2\pi r$

の測定値は、円をたくさんの小さい区間に分割したときの距離 $(rd\phi)$ の和である。その結果、右辺の最後の項 $(rd\phi)^2$ はシュワルツシルト計量でも正しい。

シュワルツシルト計量の時間的形式

時間の項と半径方向の項はどうなのか？ ブラックホールや地球の近くで変わるだろうか？ 答えは**シュワルツシルト計量**の中にある。シュワルツシルト計量によると互いに近い 2 つの事象に対して、(自転していない) 球対称引力中心の空間平面上の曲がった真空時空は

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \dfrac{2M}{r}\right)} - r^2 d\phi^2 \qquad \boxed{\text{時間的形式}} \quad (2.10)$$

で表される。この式の中に座標 r, ϕ, t が現れている。角度 ϕ の意味はシュワルツシルト幾何学でもユークリッド幾何学と同じである。t は**遠方時間**と呼ばれ、2.11 節で詳しく述べるように、引力中心からずっと離れた時計で測られる時間である。

時間的シュワルツシルト計量はあまりに重要なので、この本の後ろの巻末公式一覧に (A) 式として記しておく。

(2.10) 式は時間間隔が大きい事象に対するシュワルツシルト計量の時間的形式である。それに対して、空間的形式は空間間隔が大きな事象の組を記述し、(2.10) 式は

シュワルツシルト計量の空間的形式

$$d\sigma^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \dfrac{2M}{r}\right)} + r^2 d\phi^2 \qquad \boxed{\text{空間的形式}} \quad (2.11)$$

に置き換わる。(2.11) 式を参照しやすいように、この本の後ろの巻末公式一覧に (B) 式として付けておく。

シュワルツシルト (Karl Schwarzschild 1873–1916) はアインシュタインの一般相対論が出版されて 1 ヶ月以内で、しかも戦争が原因で亡くなる前年の 1915 年の暮れに、アインシュタインの場の方程式からこの計量を求めた。アインシュタインは彼に「問題の厳密解が得られるなんて思いもよらなかった。あなたの解析的解は素晴しいものに思える」と書き送った。

シュワルツシルト計量は天下り的である。どうやって求められるものなのか。

シュワルツシルト計量は一般相対論のアインシュタイン方程式から求められる。その方程式は時空の歪みを質量と圧力に結び付ける。質量分布が異れば、計量も違ってくる。場の方程式から計量を求めることは偉大な業績になる。アインシュタイン自身、自転も帯電もしない静的で球対称な構造の計量の導出を誰も成し遂げられないと思っていた。自転するブラックホールの計量はほぼ 50 年後の 1963 年になってやっと出版された (プロジェクト F 「自転するブラックホール」を見よ)。
ニュートンの運動方程式が「導出」されたものではないのと同様に、アインシュタインの場の方程式も導出されたものではない。光がやっとのことで脱出できる半径、「地平線」のニュートン的予言が 46 ページのボックスにある。アインシュタインがよく言っていたよう

相対論における微分のいい加減な使い方

(2.8) 式と (2.9) 式において、事象間の空間間隔を記述するため、微分 dr と $d\phi$ を使い、時間間隔については dt を使った。これらの微分の形はどこから来て、どうして使い始めることになったのか。42 ページのボックスの解析では、長さ dr, $rd\phi$ の長方形の辺がまっすぐだと近似した。しかし、内側と外側の辺はともにまっすぐではなく、どちらも円弧の一部である。この近似は小さい弧が直線のように「見える」ときにだけ、さらに角度の間隔 $d\phi$ が 2π の非常に小さな一部として扱えるときにだけ意味がある。数学者は、近似は角度ゼロの極限でのみ「正しい」と主張する。

しかし物理学者は数学者よりもかなりいい加減である。(2.8) 式はしばしば (2.9) 式よりもずっとだらけた書き方で書かれる：

$$d\tau^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\phi^2 \qquad \boxed{\text{平坦時空}} \qquad (2.9)$$

(2.8) 式 と (2.9) 式をよく見比べよ。(2.9) 式は、現在標準となっているコンパクトな代数的記法の中にどっぷりと浸かっている。厳密な記法としては間違いである。左辺は $(d\tau)^2$ であるべきで、$d\tau^2$ を正直に受け取れば、$d\tau$ は固有時の変化の 2 乗ではなく、固有時の 2 乗の変化というおかしな意味になってしまう。

このいい加減さはどこからくるのか。純粋に怠けているだけだ。余分な括弧を書き下すのに飽きて省いているだけなのだ。計量の公式を書くとき、これは秘密の約束だと — 少なくとも気持ちの中だけでも — 友だちにささやいて教えてあげよう。右辺の項も同様に、$(dt)^2$, $(dr)^2$, $(rd\phi)^2$ と読むべきである。

に、場の方程式は「人間精神の自由からきた発明」である。この発明の基本は、物理的実在と対称性に対するアインシュタインの深い洞察「自然はどのように振舞うべきか」の上に築かれている。もちろん結果は、繰り返し行われれても実験結果と正しく一致しなければならない。この本では引力中心の周りの計量から始める。計量は、(導出しない) 場の方程式から切り離れた一つのステップである。アインシュタインが行った場の方程式の導出と発展および、場の方程式の内容の記述についてはソーン (Kip Thorne) の “Black Holes and Time Warps,” 113–120 ページを見よ。

シュワルツシルトの記述は完璧だ。

さらに研究が進み、シュワルツシルト計量は球対称で自転も帯電もしていない重い物体の外部の時空 (とブラックホールの中心の潰れた点以外のあらゆる場所) を完全に記述できることがわかった。この種のブラックホールの周りの時空についてあらゆる (非量子的) 性質がシュワルツシルト計量によって記述される。この一つの式がすべてを表しているのだ。さらに、一般相対論の実験の大多数がシュワルツシルト計量のテストとなっており、結果はすべてアインシュタイン理論の予言と一致している。

「地平線」に対して使われるいろんな言葉

$r = 2M$ の半径で、シュワルツシルト計量に何かおかしなことが起きている。r が $2M$ に近づくにつれて、時間版 (2.10 と空間版 (2.11) ともに、時間の項が 0 になり、半径の項が際限なく増大する。この r の値は一方通行面の位置を示し、この内側へ落ちたあらゆるものは外側に戻ってくることはできない。半径座標の特殊な値にいろんな名前がついている：**シュワルツシルト半径**、**事象の地平線半径**。$r = 2M$ の膜は**シュワルツシルト面**や、**シュワルツシルト球面**、**シュワルツシルト地平線**、**事象の地平線**と呼ばれる。または単に**地平線**と呼ばれる (注意：この分野では質量 M の幾何学測定値を重力半径と呼ぶ研

究者もいる。また、$2M$ に対してこの語を使う人もいる。これがこの本で重力半径という言葉を避ける理由である)。

我々にとってシュワルツシルト計量は導出したものではなく与えられたものである。しかしながら無批判にこれを受け入れるわけにはいかない。ここで、この計量が物理的に相応しいものであることをチェックしてみよう。

シュワルツシルト計量は物理的に道理にかなっている：

まず第一に、dt と dr の両方に現れる**曲率因子** $(1-2M/r)$ は r 座標にのみ依存し、ϕ には無関係である。どうして？ 我々が扱っているのは球対称物体であり、どっちが右でどっちが左であるとか、どっちが上でどっちが下であるのかわからないからだ。そのため、どんな方向依存の曲率因子も dt^2 や dr^2 につかないことになる。

1. r 座標にのみ依存する。

第二に、r 座標が限りなく大きくなると、曲率因子 $(1-2M/r)$ は 1 に近づく。というよりむしろ近づかなければならない。なぜそうならなければならないのか？ 引力中心からずっと離れた観測者は、遠い物体の存在に気づかずに身近で実験をすることができる。その観測者にとって、時空は局所的に平坦である。言い替えれば、r が大きくなると、シュワルツシルト計量 (2.10) は平坦時空の計量 (2.9) に滑かに近づいていく。

2. r が大きくなると平坦時空計量に近づく。

第三に、質量 M が 0 になると曲率因子 $(1-2M/r)$ は 1 に近づく。むしろ近づかなければならない。なぜか？ 引力中心に質量がないということは中心に重い物体がないことと同じだからだ。この場合、(2.10) 式は (2.9) 式になる。

3. 質量が 0 では平坦計量になる。

第四に、dr^2 の因子、つまり $1/(1-2M/r)$ を考えよう。$r>2M$ に対して、この因子は 1 よりも大きく、前に行ったブラックホールの周りの「原理実験」と合っている（2.4 節）。直接測った間隔 $d\sigma$ は、二つの近接したフラーレン殻の r の差 dr から求めたものよりも大きい。球殻から垂直に立てた棒を考えよう。その棒は二つの同心球の間を半径方向に伸びている。爆竹を棒の両端に 1 つずつおき、同時に（$dt=0$）爆発させよう。この爆発を計量 (2.11) によって記述される 2 つの事象とする。2 つの爆発事象の方位角は 0 なので、$d\phi=0$ である。爆発の間の固有距離は球殻観測者が直接測れる半径方向の距離である。それを $dr_{\text{shell}}=d\sigma$ とする。空間的式 (2.11) から

4. dr が球殻の間を直接測った値よりも小さいことが確かめられる。

$$d\sigma = dr_{\text{shell}} = \frac{dr}{\left(1-\dfrac{2M}{r}\right)^{1/2}} \qquad \boxed{\text{球殻上で静止した放射状に伸びる棒}} \qquad (2.12)$$

が得られる。ここで dr は 2 つの球殻の換算円周の差である。実は dr_{shell} が dr より大きいことを示した「原理実験」を記述したとき、分母の $(1-2M/r)^{1/2}$ の知識をすでに使っていた。場所によって変わるこの因子により空間曲率の存在が示唆される。

(2.12) 式は非常に有益なので、この本の終わりの公式集に (D) 式として記しておく。

第五に、dt^2 の曲率因子 $(1-2M/r)$ も 1 より小さい値である。これも赤方偏移の存在と一致する（2.5 節）。半径 r の球殻にボルトで留めた時計を考える。これらの球殻時計の刻みを 2 つの事象として選び、dt_{shell} を球殻時計の刻みの腕時計時間 $d\tau$ と呼ぶ。時

5. 重力赤方偏移が確かめられる。

ニュートンはブラックホールの地平線を予言しただろうか

ブラックホールから遠く離れたところで静止していた石がブラックホールに落ち始める。徐々に石は速度を上げ、最後には中心にぶつかる。この石が半径 r の球殻を通り過ぎるとき、速さはどれくらいになっているのか。低速で重力場が弱いとき、速さはニュートン的なエネルギー保存則から簡単に得られる。通常の単位で、質量 M_{kg}（キログラムでの測定）の球形物体の重力場中における質量 m_{kg} の粒子の位置エネルギー $V(r)$ は

$$V(r) = -\frac{GM_{\text{kg}}m_{\text{kg}}}{r} \quad \boxed{\text{ニュートン}} \quad (2.13)$$

で表される。ここで G は重力定数で、位置エネルギーは無限遠で 0 に選んである。遠い距離から速さ 0 で動き始めた粒子の運動エネルギーは 0 だが、その後いつでも全エネルギーは 0 であり、位置 r では

$$\begin{aligned} E &= 0 \\ &= \frac{1}{2}m_{\text{kg}}v_{\text{conv}}^2 - \frac{GM_{\text{kg}}m_{\text{kg}}}{r} \end{aligned} \quad \boxed{\text{ニュートン}} \quad (2.14)$$

で表される。ここで v_{conv} は通常の単位 メートル毎秒で表された速度である。この式から

$$v_{\text{conv}} = \left(\frac{2GM_{\text{kg}}}{r}\right)^{1/2} \quad \boxed{\text{ニュートン}} \quad (2.15)$$

が得られる。粒子はこの速さで中心に向って移動する。全体を c で割ると、距離と時間を同じ単位で表した速さが得られる：

$$\frac{v_{\text{conv}}}{c} = v = \left(\frac{2GM_{\text{kg}}}{c^2 r}\right)^{1/2} \quad \boxed{\text{ニュートン}} \quad (2.16)$$

しかし、$(G/c^2)M_{\text{kg}} = M$ を使うと、引力源の質量は長さ（(2.5) 式）で表せる。その結果、

$$v = \left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2} \quad \boxed{\text{ニュートン}} \quad (2.17)$$

となる。驚くべきことに、(2.17) 式は一般相対論でも正しい。ただし落下物体の速さを球殻観測者が測定した速さとして解釈するときに限る（第 3 章、3.5 節）。

脱出速度　(2.17) 式から「ブラックホールの半径」を予言することができる。石が半径 r から半径方向に (2.17) 式の速さで飛んで行くことを考えよう。ニュートン力学では外側に行くのも内側に行くのも同じ時間がかかるのだが、この石は引力中心から遠く離れたところで止まる。したがって (2.17) 式は、半径 r で投げ上げられた石の**脱出速度**になる。脱出速度は重力から脱出するために必要な最小速度である。最大の脱出速度はいくらか。ここでここでニュートンを肘でどけて、相対論で答えよう。最大の脱出速度は光速 $v = v_{\text{conv}}/c = 1$ である。この値を (2.17) 式に代入し、物体が脱出できる最大の半径を求めると

$$r_{\text{horizon}} = 2M \quad \boxed{\text{ニュートン}} \quad (2.18)$$

となる。一般相対論でもこれは正しい値であり r は換算円周になる。ところが、この 2 つの理論で物理的意味は甚だ異なる。ニュートンの予言では、地平線から光速よりも小さい速さで投げ上げられた物体は遅くなり、ある半径に達して止まり落下する。それに対し、アインシュタインでは何ものも、光でさえも地平線から外に出られず（第 5 章 練習問題）、地平線から正確に真上に打ち上げられた光は 1 ミリメートルでさえも半径方向に進むことは決してないだろう（歴史的な詳細については 93 ページのボックスを見よ）。

計の刻みの間の座標間隔 dr と $d\phi$ は 0 なので、時間的式 (2.10) から

$$d\tau = dt_{\text{shell}} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} dt \quad \boxed{\text{球殻上で静止している時計}} \quad (2.19)$$

が得られる。ここで dt は遠方時間に相当する時間経過である。2 つ目の「原理実験」から、時計が放つパルスの間隔 dt_{shell} は、遠いところで受信した赤方偏移した値 dt よりも

短い。つまり、dt_{shell} は dt よりも短い。この結果は、シュワルツシルト計量の時間の曲率因子 $(1-2M/r)$ が 1 よりも小さいことと一致する。

(2.19) 式は非常に有益なので、この本の終わりの公式集に (C) 式として記しておく。

シュワルツシルト計量は物体表面の外側でのみ使える。

シュワルツシルト計量 (2.10) は、自転も帯電もしない重い球対称物体の外部にある自由粒子の運動を支配する。地球および太陽などの普通の星を始めとする天体はゆっくり自転しているが、それらにも高い精度で使うことができる。このような物体の外部における粒子の運動は、引力を及ぼす物体の内側で座標がどうなっているかに無関係だ。なぜなら、粒子が決してそこにたどり着くことができないからだ。その前に星の表面で静水圧平衡にある流体面に衝突してしまうだろう。しかし形状がコンパクトになれば、それだけテスト粒子が探査できる時空領域は大きくなる。太陽の表面は中心から 695980 キロメートルのところにある。太陽質量の白色矮星の半径は約 5000 キロメートルであり地球とほぼ等しい。シュワルツシルト計量はその半径の外側の領域で時空幾何を記述する。太陽質量の中性子星の半径は約 10 キロメートルであり、テスト粒子は白色矮星のときよりもさらに近づいてもまだ「外側」にいることになる。中性子星が自転していなければ、シュワルツシルト計量によって記述することができる。

ブラックホールには「表面」がない。

理想的な限界は静水圧平衡状態にある星ではない。それは、完全な重力崩壊を経てブラックホールになった星である。シュワルツシルト計量 (2.10) は半径 0 にまですっかり適用することができる。ブラックホールで素晴しいことは、衝突するための表面も構造も物体もないことである。テスト粒子は表面にドカンとぶつかることなく、ブラックホールの周りのあらゆる時空を探査することができる。表面が全くないからである。

ぶつかる物がないなんてブラックホールは一体どうなっているんだ。物質からできていないのなら、何でできていって言うんだい。星や星団が潰れてブラックホールになるときに何が起きるのか。物質からできていないならば、何が質量を担っているのか。

質量はすべてずっとそこにあり、その近くの時空曲率を作り出している。そして、潰れて中心で特異点になる。どうやったらわかるんだって それりゃあ、わからないさ。シュワルツシルト計量から求めた予測からだ。この予測は確かめられるのかって？ 我々は地平線の中に落ちるときにだけ実験を行なうことができ、特異点に近づいても測定ができる。しかし、我々自身も我々の報告書も地平線を越えて戻ることはできない。驚いた？ 狂気じみている？ 馬鹿馬鹿しい？ ようこそ、一般相対論へ！

それにしても、このやっかいな「特異点」とは何なんだ。少し前に聞いたことがあるが、それが何なのかわからない。

特異点は「誰にもわからない」現象である。点電荷の静電気力についてのクーロンの法則は $1/r^2$ の依存性をもち、$r=0$ で無限大になる。それは現実的ではない。古典物理学（非量子論）で表される構造に点電荷のようなものは存在しないためである。シュワルツシルト計量で曲率因子 $(1-2M/r)$ は $r=2M$ で 0 になり、計量の一つの項は使用不能になる。しかしながら、この計量の特異点は座標系の選び方によるもので、「本当」の特異点ではないことが長い研究のすえ発見された。自由落下している人が $r=2M$ を通過しても衝撃を感

じることはない（$r = 2M$ での滑らかさは 第 3 章とプロジェクト B 「ブラックホールの内側」 で詳しく述べられている)。一方で、$r = 0$ の特異点は「実在」するようだ。つまりブラックホールに落ち込むあらゆるものは体積 0 の 1 点に潰れる。これは古典理論（非量子論）である一般相対論の予言である。それに対して量子論は、どんなものも、一個の電子でさえも一点に閉じ込められないと予言する。では真実はどこにあるのだろうか。まだ誰も成功していない。誰も量子論と一般相対論を統合した**量子重力の理論**を作り上げていないのだ。いずれにせよ、自然は $r = 2M$ の内側にある特異点に隠れている。だから、外側にいる間はわからない。この状況は、あたかも宇宙に検閲官がいるかのように、すべての実在の特異点は「服を着ている」と記述される。一方通行の面に隠されていない「裸の」(検閲を受けていない) 特異点はあるのだろうか。我々はまだ何も知らない。

未来を予言することはできない

もし裸の特異点、すなわち無限遠から見える特異点があれば、すべてお手上げだ。アインシュタイン方程式とすべての既知の物理法則がそこで破綻してしまうため、時空の特異点が存在すれば未来を予言することができなくなる。特異点がすべてブラックホールの内側に隠されているならば、心配はいらない。しかし、そうでなければ銀河の星が重力崩壊するごとに我々は驚かされることだろう。

– ホーキング（Stephen Hawking）

2.10　シュワルツシルト計量の空間部分の描写

時間を凍結し曲った空間を調べよ。

ブラックホールの周りの幾何学をどうやったら視覚化できるのだろうか。一般相対論では、どんな座標系でも曲がった時空の性質のうち 1 つや 2 つは正しく表わしているが、他の性質は不正確になる。すべての座標系は部分的であり、制限を受けている。これらの座標系を表す図や絵にも、同じように時空の性質が明解にまたは誤って具体化されている。

計量の空間部分を視覚化する。

シュワルツシルト計量の 空間的部分の一部を視覚化して示すことができる。時間を凍結し（$dt = 0$ とせよ)、ブラックホールの中心を通る空間面だけを考えよう。すると、シュワルツシルト計量 (2.11) の空間的形式は

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - \dfrac{2M}{r}} + r^2 d\phi^2 \qquad \boxed{dt = 0} \quad (2.20)$$

となる。図 6 と図 7 は特殊な場合である。各円の半径 r が r 座標、換算円周であり、球殻とブラックホールの中心を通る空間平面が交わる領域に対応する。微分 dr は近接する円の間の換算円周の差である。我々は図の垂直方向に次元を加え、外側では面が上方に傾

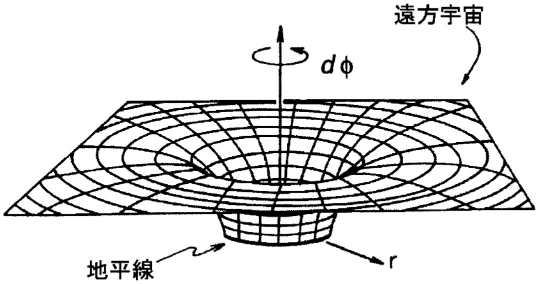


図 **2.6**　ブラックホールの中心を通って薄く切った面の空間幾何。結果を **3** 次元ユークリッド空間に「埋め込んでいる」。真空の空間（どんな質量もエネルギーもない空間）の曲率はすべてブラックホールの質量による。円は球殻と切った面の交線となっている。我々は垂直次元を加えることによって、シュワルツシルト計量の空間部分で $d\sigma$ が dr よりも大きいことを示した。図 **7** でもっとはっきりする。

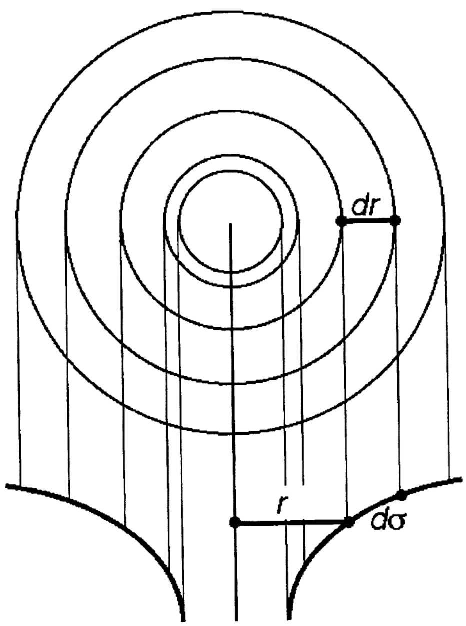


図 **2.7**　図 **6** の埋め込み図の射影。**2** つの近接する球殻を半径方向に（$d\phi = 0$ のとき）直接測定した距離 $d\sigma$ が r 半径の差よりも大きいことを示している。実際の観測者は放物面上にのみ存在する（横から見たところを太い実線として示した）。その人たちは $d\sigma$ を直接測ることができるが、r や dr はできない。円周を測り 2π で割ることで、r 座標値（換算円周）が求められる。dr は近接する円の換算円周の差の計算値である。

くことで距離が固有距離 $d\sigma$ を表すようにスケールした。固有距離は隣接する円を錘と巻尺で半径方向に測る。こうしてできた「漏斗」の形を回転放物体と呼び、図 7 の太い曲線は放物線（実際は放物線の半分）である。

図 7 では $d\sigma$ が dr よりも大きいという事実を形に表しており、最初に示したブラックホールの周りの空間曲率を明示している（2.4 節）。この図はさらに、半径座標が臨界値 $r = 2M$ に近づくと、比 $d\sigma/dr$ が限りなく増加することも表している（漏斗の喉で放物体の傾きは垂直になる）。

「埋め込み図」は空間曲率の視覚化に役立つ。

これらの図では印刷面上で遠近法を使って、平坦なユークリッド幾何の中で曲がった空間幾何を埋め込んでいる。したがってこれらの図は**埋め込み図**と呼ばれる。しかし平坦なユークリッド幾何は曲がった時空ではない。したがって、埋め込み図に何らかの形で誤った表現が含まれていることが予想される。嘘をついているのだ。例えば、図 6 と図 7 の垂直方向の次元は人工の産物であり、時空に余分な次元があるわけではない。シュワルツシルト幾何を視覚化して見やすいように我々がこの 3 つ目のユークリッド空間を加えたのだ。この図では放物面だけが曲がった空間幾何を表している。放物面上にいる観測者はその上にい続けなければならない。それは、物理的な制限のためだけでなく、面から外れようにも時空が存在しないからでもある。

観測者は dr を直接測ることができない。

放物面上に制限された観測者は 図 6 と図 7 に示した円のどの半径も直接測ることはできない。この半径（換算円周）を得るためには、円の周りの距離を測ってその円周とし 2π で割ることで、間接的に求めなければならない。近接する円周から半径を求めて、2 つの円の換算円周の差 dr を計算する。それに対して、近接する円の固有距離 $d\sigma$ は半径方向に測定でき（(2.20) 式で $d\phi = 0$ のとき）、換算円周の差 dr を計算し、2 つを比べることができる。その結果、$d\sigma$ は dr よりも大きい。比 $d\sigma/dr$ は $r = 2M$ で無限大になる（図の中では放物面は垂直になる）。

時空の曲率が軌道を記述するために必要だ。

埋め込み図、図 6 と 7 はシュワルツシルト幾何の空間部分を切り取ったものを表している。$dt = 0$ なので時間は入っていない。この面には時間変化を表すものがないため、動くものは描かれていない。したがって、これからシュワルツシルト幾何の時空を通じて、粒子の運動や光のフラッシュについて得られるものはない（にもかかわらず、科学博物館でこのような面上を鉄球が転がっているのを見たことがあるだろう）。第 3, 4 章では、ブラックホールの周りの軌道について述べ、$r = 2M$ のシュワルツシルト面を通ってブラックホールの「中」へ突っ込んでいく軌跡についても調べる。しかし、まず 2.11 節でシュワルツシルト計量の「遠方時間」 t の意味を述べたい。

例題 1 小さい曲率の極限

シュワルツシルト計量の曲率因子 $(1-2M/r)$ は平坦時空と曲がった時空の差を際立たせる。曲率を極端に小さくするためには引力中心からどれくらい離れなければならないか。

A. まず最初の例として、太陽（$M \approx 1.5\times10^3$ メートル）の曲率因子 $(1-2M/r)$ と 1 の差が 100 万分の 1 しかないような r の値を求めよ。この半径を太陽の半径（$r_S \approx 7\times10^8$ メートル）と比較せよ。

B. 2 番目の例として、太陽の曲率因子と 1 の差が 1 億分の 1 であるような r の値を求めよ。この半径を地球の平均軌道半径（$r \approx 1.5\times10^{11}$ メートル）と比較せよ。

解答

A. $1-\dfrac{2M}{r} \approx 1-10^{-6}$ となる r の値が必要である。それは

$$\begin{aligned} r &\approx \frac{2M}{10^{-6}} \\ &= 2\times1.5\times10^3\times10^6 \text{ メートル} \\ &= 3\times10^9 \text{ メートル} \end{aligned} \tag{2.21}$$

である。この半径は太陽の半径のほぼ 4 倍である。

B. この場合、$1-\dfrac{2M}{r} \approx 1-10^{-8}$ となる r の値が必要である。したがって

$$\begin{aligned} r &\approx \frac{2M}{10^{-8}} \\ &= 2\times1.5\times10^3\times10^8 \text{ メートル} \\ &= 3\times10^{11} \text{ メートル} \end{aligned} \tag{2.22}$$

であり、これは地球の軌道半径のほぼ 2 倍である。

2.11 遠方時間

空間を凍結し曲がった時空を調査せよ。

空間の幾何だけを知るのでは十分ではない。惑星がどのように動くべきかを伝える時空の支配力を知るためには、時空の幾何学を知る必要がある。2 つの互いに近い点 P, Q の間の空間距離を知るだけではなく、時空中で近い事象 A, B の間隔を知らなければならない。

シュワルツシルト計量では いわゆる**遠方時間**を使っている。遠方時間 t を記録する遠方時計がたくさんあるはずだ。これらの時計はブラックホールからすべての方向に広がった格子をつくっている。ブラックホールの影響から離れて、時計は平坦時空の中にあり、第 1 章（1.9 節）で述べた自由浮遊系でパルスを使って行ったような方法で互いに時間合わせをすることができる。しかしながら、この場合、時間合わせのためのパルスは曲率因子 $(1-2M/r)$ の値が 1 と大きく異なる領域を通過して来てはならない。引力源に対して静止している時計の読みを「遠方時間」と呼ぶ。ふつう、我々は t **座標**と言い、記号 t を使う。遠方時間の増加 dt はシュワルツシルト計量の右辺にある。

大きな r で測定される遠方時間 t.

定義により、2 つの事象間の時間経過 dt は引力源からずっと離れた観測者が記録する時間になる。

dt_{shell} と dt の間の関係

dt_{shell} と dt の関係はシュワルツシルト計量から直接読みとることができる。地上の固定した位置に据え付けられた時計を考えよう。この場合回転していないとし、地球の空間位置は時計の針が動く間に変化しない。したがって dr と $d\phi$ は両方とも 0 である。針の刻みは同じ時計で起きるので、間隔は固有時 $d\tau$ である：$dt_{\text{shell}} = d\tau$. 同じ場所で起きる 2 つの事象は明らかに時間的な関係にあるため、シュワルツシルト計量の時間的形式を選ぼう。結果は (2.19) 式に示されている:

$$dt_{\text{shell}} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} dt \tag{2.19}$$

(2.19) 式から、2 つのパルスを放出する地上の時計で記録する時間は、地球から離れた観測者の記録する時間間隔 dt とは違うことがわかる。シュワルツシルト計量では、時間の曲率因子は空間の曲率因子と一点を除いて同じである。空間の場合は 1 より小さい曲率因子で割っているため、半径座標から予想されるものよりも大きな距離になる。時間の場合には、1 より小さな曲率因子を掛けているため、ブラックホールの近くでは遠方時計の読みから予想されるものよりも時間の進み方が遅い。

ちょっと待った！ どうすれば、2 つの事象の時間差 dt を引力源からずっと離れた観測者の経過時間と常に等しく保つことができるのだ。引力源の近くで起きる 2 つの事象はどうなのか。例えば、地上で静止した時計が 2 回カチッカチッとなり、我々は地上で時計の時間の変化を読み取るとする。どうやってこの時計の進みを遠方の観測者は記録するのか。

2 つの事象が地上で起きたとき、その時間差を遠方で決めるための同等な方法が 2 つある。(1) 光の信号を送ることによって、地上の時計の読みと遠くの時計の読みを比べる。地上の時計が時を刻む毎に光の信号を送る。2 つの信号は、球殻の時計で dt_{shell} だけの時間差がある。地球から離れた観測者は 2 つの信号を受け取り、観測者の時計で dt と記録する（時間差が測定されているので、伝達時間は打ち消し合っている)。(2) もう一つの方法は、54 ページのボックスにあるように球殻上に遠方時計を置くことである。

「上昇する光」の重力赤方偏移

球殻時間と遠方時間を比較するとき、時間差のあるパルスを 2 つ使う代わりに光の波を使うことができる。近距離の時計によって放出された光の振動周期はすべて時計の刻み dt_{shell} の測定値と考えることができる。この信号を遠くの観測者が受信すると、(2.19) 式に示すように周期 dt は長くなっている。可視光の周期は長くなると赤くなる。2.5 節に述べたように、重力赤方偏移は 1915 年に予言され、その後に名づけられ、1960 年に発見された。時計によって放出された光が赤くなっているのを遠くの観測者が測定したのだった。

「下降する光」の重力青方偏移

重力中心からずっと離れたところから 中心に向けて信号を送ると、周期は短くなる。受信者は発信者の「固有周期」よりも短い周期の信号を受け取り、光は青い方にずれる。これを**重力青方偏移**と呼ぶ。

ブラックホール付近で起きるこのような効果は、地上付近よりもかなり大きい。ブラックホールの地平線（$r = 2M$）を発光点とし、光を半径方向外向きに送ろうとするとき、

例題 2 「半径方向の伸び」の例

太陽質量のブラックホールに対して、$r = 4$ キロメートルの球殻と $r = 5$ キロメートルの球殻の間の半径距離の直接測定値を計算すると、1.723 キロメートルとなることを 2.4 節の終わりで述べた。それを確かめよ。ユークリッド幾何では測定距離は 1 キロメートルとなるだろう。

解答

太陽の質量は有効数字 4 桁で $M = 1.477$ キロメートルである。質量と距離すべてをキロメートルで表し、シュワルツシルト計量の増加を使うと

$$dr_{\text{shell}} = \frac{dr}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2}} = \frac{1\text{ キロメートル}}{\left(1 - \frac{2.954\text{ キロメートル}}{r}\right)^{1/2}} \tag{2.23}$$

となる。右辺の分母にどちらの半径 r を入れたらよいのだろうか。$r = 4$ キロメートルを代入すると、結果は

$$dr_{\text{shell}} = 1.956\text{ キロメートル} \quad r = 4\text{km} \tag{2.24}$$

となるが、$r = 5$ キロメートルを代入すると

$$dr_{\text{shell}} = 1.563\text{ キロメートル} \quad r = 5\text{km} \tag{2.25}$$

となる。困ったことに $2M/r$ の項は $r = 4$ キロメートルと $r = 5$ キロメートルで半径方向の因子は大きく変わってしまう。(2.24) 式と (2.25) 式の結果を見れば答えがおかしいことがわかる。計算を正確にするためには、$r_1 = 4$ キロメートルから $r_2 = 5$ キロメートルまでの増加分 dr_{shell} をすべてたし合わせる必要がある。「たし合わせ」とは積分のことである。積分の結果 Δr_{shell} は 1.563 キロメートルと 1.956 キロメートルの間になるであろう：

$$\Delta r_{\text{shell}} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2}} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{r^{1/2}dr}{(r - 2M)^{1/2}} \tag{2.26}$$

この積分はふつうの積分表にはない。置換 $r = z^2$ をし、これから $dr = 2zdz$ とすると、積分は

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{2z^2dz}{(z^2 - 2M)^{1/2}} = z(z^2 - 2M)^{1/2} + 2M \ln \left| z + (z^2 - 2M)^{1/2} \right| \Big|_{z_1}^{z_2} \tag{2.27}$$

となる。ここで ln は（e を底とする）自然対数であり、| | は絶対値を表す。数値（単位を略す）

$$\begin{aligned} 2M &= 2.954 \\ z_1 &= \sqrt{4} = 2 \\ z_2 &= \sqrt{5} = 2.236 \end{aligned} \tag{2.28}$$

を代入し $\ln(B) - \ln(A) = \ln(B/A)$ を思い出すと

$$\Delta r_{\text{shell}} = 1.723\text{ キロメートル} \tag{2.29}$$

となる。この値は 2.4 節の終わりに示したもので (2.24) 式と (2.25) 式の中間の値になっている。

曲率因子の平方根 $(1 - 2M/r)^{1/2}$ は 0 になる。ブラックホールから離れた遠方の観測者によって測定される光の周期 dt は無限大である。球殻観測者が測った光の周期 dt_{shell} がどんなに短くても関係ない。しかし、無限大の周期の光は全く信号とはならない。初めに述べたように、光がブラックホールの地平線から脱出できないという意味である。こうしたことから「ブラックホール」という名が説得力をもつのだ。

個人用遠方時計

ブラックホールの重力の穴深い（だが地平線の外側）球殻上で静止している観測者は望めば、球殻時計に加え、第二の時計を手に持ち、遠方時間 t を直接測ることができる。そのためには 2 つの作業が必要だ。(1) 手元の遠方時計の進みを調整し (2) 手元の遠方時計を、本当に遠くにある時計と合わせる。

進みの調整。 遠方時間時計の進みの調整ねじを回して、自分のふつうの時計に比べ $1/(1-2M/r)^{1/2}$ 倍速く進むようにする。この因子は、ブラックホールの質量 M と換算円周 r を使って計算することができる。ニューヨーク居住のイギリス人がイギリスのグリニッジ時間に合わせた第二の時計（遠方時間時計）を常に持ち歩いていることがあっても、進み方を速めることはしない。

同期化。 個人用遠方時計を以下の過程にしたがって同期化する。(a) 光のパルスを放射状に送って遠くの時計に時刻を尋ねる。(b) その申請を受け取った遠くの時計は直ちに、そのときの時刻を暗号化し、光の信号として送り返す。(c) 観測者が受け取ったとき、暗号化された時刻が申請の事象と応答の事象の時刻の半分だと考え、個人用遠方時計を合わせる。

個人用遠方時計を各球殻に置くことで、実質的に、時計と物差しでできた遠方格子をブラックホールの地平線まで（または回転していない星や白色矮星、中性子星の表面まで）伸ばすことができる。すべての遠方時間はこれらの時計によって記録され、r 座標の値があらゆる球殻上で記される。


ふざけるな！ 時計は時計だ。時計間の信号の交換についてはたくさん聞いてきたが、実際の時計で記録される実際の時間については何も言っていないではないか。どちらの観測者の時計が事象間の本当の時間を記録するんだ。


特殊相対論で、一様に相対運動する別々の系で 2 つの事象の時間を記録すると、差があることが測定され確かめられていることを学んだ。同じように、一般相対論では、ブラックホールの近くのいろんな観測者が記録すると、相対的に静止していても 2 つの事象に時間差があることが確かめらている。特殊相対論でも一般相対論でも、これらの差が信号の交換の方法によるものであるか、時計の進み方によるものであるかということを観測によって区別することはできない。「実際の時間」という言葉は、時間が測定される方法と独立には、一意的な意味をもつことはできない。

ゲッチンゲンの通りのすべての生徒

アインシュタインの研究に詳しくない人たちの多くは、アインシュタインを複雑な数学の本の力によって前進する人だと思っている。真実は正反対だ。時の大数学者ヒルベルト（David Hilbert）は「ゲッチンゲン通りのどんな生徒でもアインシュタインより 4 次元幾何学のことを理解している。でも、... アインシュタインはその研究を行ったのだし、数学者ではないのだ」と評した。アマチュアは権威を輝かせる中心点をよく知っているだけなのだ。

– ホイーラー（John Archibald Wheeler）

例題 3 上に輝く

ある球殻から発せられた光が他の球殻に吸収されたとき何が起きるか。特に、$r_1 = 4M$ の球殻から発光され、$r_2 = 8M$ の球殻で吸収されるとしよう。

解答

(2.19) 式によって、球殻観測者が測定する光の周期 dt_{shell} は遠くの観測者が測定する周期 dt と関係づけられる。しかし、別の半径の第二の球殻観測者によって測定される周期が必要だ。第二の球殻で周期を測る方法の 1 つは (2.19) 式を 2 回使うことであり、1 度ずつ各観測者に使い、遠方時間の経過 dt を両方で等しくするのである。内側の球殻から届いた光を遠方の観測者が鏡で反射して第二の観測者に向けさせる。この過程の結果は、光が 2 つの球殻の間を直接の伝達する場合と同じ結果にならなければならない。(2.19) 式を 2 度使う。

$$\frac{dt_{\text{shell 1}}}{\left(1-\dfrac{2M}{r_1}\right)^{1/2}} = dt = \frac{dt_{\text{shell 2}}}{\left(1-\dfrac{2M}{r_2}\right)^{1/2}} \tag{2.30}$$

これから

$$\frac{dt_{\text{shell 2}}}{dt_{\text{shell 1}}} = \frac{\left(1-\dfrac{2M}{r_2}\right)^{1/2}}{\left(1-\dfrac{2M}{r_1}\right)^{1/2}} \tag{2.31}$$

が得られ、$r_1 = 4M$ と $r_2 = 8M$ を代入すると

$$\frac{dt_{\text{shell 2}}}{dt_{\text{shell 1}}} = \frac{\left(1-\dfrac{1}{4}\right)^{1/2}}{\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^{1/2}} = \frac{0.866}{0.707} = 1.22 \tag{2.32}$$

となる。光が $r = 4M$ から $r = 8M$ に上昇すると、光の周期は 1.22 倍増加する（赤方偏移する）。たとえば黄色はこの倍率で深紅にずれる。

2.12 3 つの座標系

(1) 自由浮遊、(2) 球殻、(3) シュワルツシルト記録係。初めの 2 つは局所的に有効で、3 つ目で時空を張る。

ブラックホールに落下するために 推進力のない衛星に乗る。または、球殻の足場に立ち衛星が突っ走って通り過ぎていくのを観測する。または、換算円周 r と角度 ϕ, 遠方時間 t を使って衛星の運動を分析する。これらの観測者はそれぞれ異なった座標の組を必要とし、衛星の運動とブラックホールの周りの時空構造を分析し調べるとき、それぞれ異なる視点をもつ。これらの座標系には人がいられるのだろうか。もし可能ならば、どのようになるのか。どのように衛星の運動を記述するのか。そして一つの系の記録は別の系ではどうなるのか。これらの問題に短く答えてこの章を締めくくりたい。

できるだけたくさんの基準座標系

2.12.1 自由浮遊系

ブラックホールに向かって落下する推進力のない宇宙船の内部のような自由浮遊系ほど単純でリラックスできる場所はない。このような宇宙船を球殻観測者たちが観測すると、

宇宙船の速さは時間とともに増加する。乗っている人にすれば、宇宙船は特殊相対論のカプセルとなる。その中では、ブラックホールの存在を気にかけないでいられる。上下、左右、前後すべての方向が同じである。鍵や硬貨、コーヒーカップは止まったままであり、押せば等速直線運動をすることが観測される。この自由浮遊系では星間空間に重力がないかのように近傍の事象間の時空間隔を計算したり、衝突を分析するのに、特殊相対論が使える。

自由浮遊系は局所的なときだけ使える。

だが、自由浮遊系の単純さは局所的なものである。2つまたはそれ以上の自由粒子を十分離すか、十分時間をかけて観測すると粒子間の潮汐相対加速度の存在によって時空曲率を測定することができる。曲率は非局所的な時空の非平坦性を明らかにするものである。潮汐加速度により、自由浮遊系中のある方向に離れた2つの物体は互いに近づき合い、別の方向に離れた2つの物体は互いに遠ざかる（第1章の図4)。潮汐加速度が見つかると、その系は自由浮遊系ではないことになる。潮汐加速度が検出されないようにするために（もちろん実験装置の精度の範囲内で）自由浮遊系を狭くするか、測定時間を短くする。これらの制限は、地上付近や重力源から遠く離れた所にある自由浮遊系では問題を起こさない。ブラックホールの中心に近づくと、潮汐力が次第に現れ、そして防ぎようもないことがわかってくる。中心近くになると、一般相対論では、潮汐加速度がすべての物理的物体を引き裂くことが予測される。

自由浮遊系は身近で単純でしかも普遍的である。3つの系のうち、ブラックホールの近くで人間がいられる唯一の系である。地平線近くの球殻上で立っていると、鋼鉄の物体でさえも「重力」によって破壊される。それに対して、十分大きなブラックホールでは、少なくとも、中心の特異点から十分離れているところの潮汐力は地平線の内側でさえも、人体にとって厳しくない（プロジェクトB「ブラックホールの内側」)。

2.12.2 球殻

地表は「球殻」である。

我々は、球殻（近く）の上、地上に住んでいる。球殻は我が家である。そこに建物と呼ぶ格子を習慣的に建てている。建物は時間合わせをした時計を備え、相互に直交した軸をもっている。地表の球殻上で立ったり座ったりするためには自由粒子の自然な運動から離れなければならない。そうすることで地球の中心に向かう「重力」を経験する。日常生活で、身の周りの事象を分析するために、この「力」を他と同じ種類の力と考えているだけである。これは、日常で経験するような空間と時間の狭い領域中ではよい近似になっている。実験室の高速粒子に対しては相互作用が速すぎて「重力」がほとんど影響を与えないため、そのような相互作用に対してもよい近似となっている。このような実験に対して地球系は実質的に自由浮遊系として振舞い、特殊相対論を使った分析をしてもよい結果が得られる（第1章1.8節)。

球殻観測者は特殊相対論を使う。

球殻観測者は特殊相対論で十分なのか？ 大丈夫だ。少なくとも局所的な時空に対しては。この結論は球殻観測者の計量の形によって支持される。シュワルツシルト計量 (2.10)

マイクロメータとしての計量

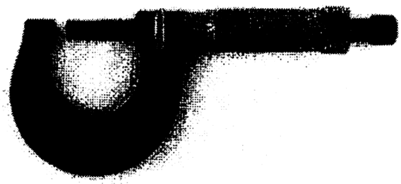


図 2.8　マイクロメータ。金属箔の厚みなどのような小さい距離を測定するのに使う。右のねじを回して左の円筒上の間のすき間を測る。

計量とは何だ。何の役に立つんだ。金属加工士やその他の技術工が小さい距離を測定するために使う**マイクロメータ**を考えよう（図 8)。技術工はマイクロメータを使い、測るべき距離を決める。

計量は、事象間の小さな時空間隔を測定するための「4 次元のマイクロメータ」である。「計量マイクロメータ」は、あなたの選んだ事象間の記録係座標の増分 dr, $d\phi$, dt を固有時 $d\tau$ または固有距離 $d\sigma$ に翻訳する。

I. 2 つの事象に対して第一の可能な選択：球殻に取り付けられた時計が連続して刻む 2 つの音。このとき、$dr = d\phi = 0$ であり、固有時間の進み $d\tau$ は、球殻時計 $dt_{\rm shell}$ で読んだものである。結果は、球殻時間と遠方時間の関係式 (2.19) で与えられる。

II. 2 つの事象の第二の可能な選択：棒の両端の事象が、近接する 2 つの球殻の間を半径方向に置かれて静止している。$dt = d\phi = 0$ と選ぶと、固有距離は棒の長さ $dr_{\rm shell}$ になる。結果は、球殻間を直接測定した距離とシュワルツシルト座標の半径方向の間隔の関係を表す (2.12) 式になる。

III. 第三の可能な選択：半径方向に自由落下する粒子に取り付けた腕時計が刻む 2 つの音。$d\phi = 0$ であり、固有時はこの腕時計の直接の読みである。これらから、第 3 章でいくつかの重要な結果が導かれる。

などなど。互いに近い事象の組が無限にあり、それに応じて 4 次元のマイクロメータを使うことができる。

若僧が計量マイクロメータを実際に使うにあたって、「熟練の技術工」にアドバイスはないかと尋ねれば、次のように答えるかもしれない。

1. 事象と事象の間隔を考えろ。それらは決して「長さ」や「位置」のようなはっきりしない概念ではない。
2. 事象間の距離と別の事象の組の距離を間違えるな。
3. 可能ならば、1 つまたはそれ以上の座標で差が 0 となるような事象の組を選ぶこと。
4. 可能ならば、固有時または固有距離を誰かの測定値とすること。
5. 光のフラッシュが 1 つの事象から もう 1 つの事象に直接移動することができれば、事象間の固有時は $d\tau = 0$ になる。

に (2.12) 式の $dr^2_{\rm shell}$ と (2.19) 式の $dt^2_{\rm shell}$ を代入すると

$$d\tau^2 = dt^2_{\rm shell} - dr^2_{\rm shell} - r^2 d\phi^2 \tag{2.33}$$

となる。

球殻系も局所的である。

(2.33) 式の右辺には 球殻観測者によって直接測られる座標値の増加だけがある（半径 r は、$rd\phi$ が球殻の表面に沿って直接測られた距離になるように定義されていることを思い出せ。2.4 節および 42 ページのボックスを見よ）。(2.33) 式は平坦時空の計量のように**見える**。しかし、時空はブラックホールの近くの球殻上で平坦ではなく、(2.33) 式が有効に使えるのは局所的な測定に限られる。結局、$rd\phi$ とともに、$dt_{\rm shell}$ と $dr_{\rm shell}$ はすべて

r の関数である。まだ、(2.33) 式には使い道がある。たとえば、球殻観測者が測定すると光（$d\tau = 0$）の速さは 1 であることがわかる。それは (2.33) 式の右辺の後ろの 2 つの項に距離の増加の 2 乗 ds^2_{shell} を代入すると容易にわかる。もちろん球殻上で行われるすべての実験は、球殻が自由浮遊系でないという事実のために見かけ上の「重力」によって影響を受ける。

自由浮遊系と球殻系の観測者は特殊相対論を使ってデータを交換する。

この重力を除けば、(2.33) 式の**局所球殻系**は、落下する観測者の局所自由浮遊系に似ている。二つの系で光の局所的な速さは 1 であり、特殊相対論は短時間内の局所的な実験を正しく記述する。さらに、球殻観測者と自由浮遊系の観測者は特殊相対論を使って、時空中で互いに近い局所的事象のデータを交換する。データ交換の可能性を以下の章とプロジェクトで使う。

2 つの重要な点において、局所自由浮遊系は局所球殻系よりも一般的である。(1) 自由浮遊系では空間を狭めることにより、特殊相対論を長い時間使うことができるのだが、球殻では重力の直接の効果はどんな策を弄しても減らせない。(2) 自由浮遊系観測者は中断することなく地平線を横切って実験を続けることができる。少なくとも潮汐力に押し潰されるまでは。それに対して、地平線およびその内側で球殻観測者は存在することはできないし、(2.33) 式も使い物にならない。

鉛直方向に離れた時計では進みに差がある。

重力場に対し垂直な方向に離れた時計の進み方に差があるなんて、地球のほとんどの住民には馴染みがない。だが、その効果は、全地球測位システム（GPS）の性能を設計したり予測したりする人すべてが日々経験することである（プロジェクト A「GPS（全地球測位システム)」を見よ)。

鉛直方向の差は曲率に影響される。

原理的には直接測定できる地球の半径と、円周を 2π で割って求めた換算円周の差は、一般相対論の効果の中で最も疎遠なものだろう。ブラックホール近くの 2 つの同心球殻では、直接測定できる半径距離は換算円周 r の差よりも大きい。

球殻座標で特殊相対論を使って分析しようとすると、時計の進みと鉛直方向の間隔の効果が時空領域を制限する。それでは大域的な座標系に移ろう。しかしそれは地球や太陽、ブラックホールの近くで実行される実際の実験から離れていく。

2.12.3 記録係座標 r, ϕ, t

シュワルツシルト座標は時空全体の領域を張る。

自由浮遊系の観測者は時空の小さな断片だけを観測する。 局所的な球殻観測者も同じような制限を受ける。**シュワルツシルト座標系** と呼ばれる座標系 r, ϕ, t は事象の大域的な記述に必要な用件を満たしている。例えば、互いにブラックホールをはさんで正反対の位置にあり空間的に離れている 2 つの事象を網羅することができる。換算円周 r と方位角 ϕ, 遠方時間 t によってブラックホールの周りのすべての空間を網羅することができる。それらは重力源の中心から遠く離れたところで止まっている系で行われた測定結果として報告される。ラテン語は中世ヨーロッパにおける国際語であった。シュワルツシルト座標系 r, ϕ, t はブラックホールの近くで起きる事象を記述する国際語となっている。

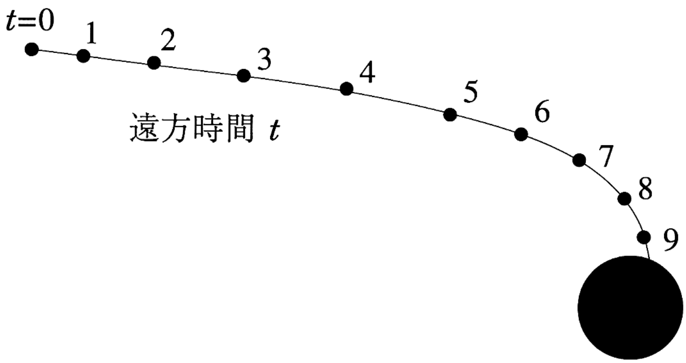


図 2.9 ブラックホールに吸い込まれる物体の軌道を模式的に表したシュワルツシルト地図。100 フラッシュごとに数字をふって示してある。隣のフラッシュは時間的にも空間的にも近く、自由浮遊系観測者または球殻観測者によって直接観測することができる。誰もこの地図で示した軌跡を直接観測することはない。質問：なぜ番号の付いた事象のドットは、中間付近よりも軌跡の両端での方が互いに近いか。(答えは第 3 章)

シュワルツシルト観測者は自分自身がほとんど何も測定しない記録係であり、記録の保管人であり、計算に優れた会計士である。局所球殻観測者と自由浮遊系観測者からの報告書を吟味し、ブラックホールの周りの時空で起きた事象の報告書を 1 つにまとめ上げるのに時間を費す。報告書を受け入れる前に、この完全主義者は、観測者に事象間の座標間隔を自分の言語、換算円周 r と方位角 ϕ, 遠方時間 t を使って書くように命じる。そういった意味で**シュワルツシルト記録係**と呼ばれる。

シュワルツシルト観測者は記録係である。

衛星がブラックホールの 2 つの同心球殻をすばやく通り過ぎるとき、1 回ずつフラッシュを迅速に発光する。局所球殻観測者はフラッシュの短い間隔を直接測定する。つまり球殻に取り付けられた時計によって測られる時間間隔 dt_{shell} と巻尺で測られた垂直間隔 dr_{shell} を測定する。球殻観測者は軌道面における方位角の変化 $d\phi$ も測り、この角度の増加が方位角方向の間隔 $rd\phi$ に一致することを確かめる。ここで r は球殻上で記録される換算円周である。球殻観測者は (2.19) 式を使って dt_{shell} を dt に変換し、(2.12) 式を使って dr_{shell} を dr に変換する。この 2 つの式はシュワルツシルト計量の特別な場合である。そして、球殻観測者は dt, dr, $d\phi$ をシュワルツシルト記録係に報告する。

そして、シュワルツシルト記録係はすばやく実行に移す。記録係は初期値として空間と時間座標 r, ϕ, t の値を知っており、局所観測者が報告した遠方時計の進み dt ごとに、これらの座標値に増加量 dr, $d\phi$ を加える。結果は、表や図または**シュワルツシルト地図**と呼ばれるものとして作成され、これを使えば時空中の衛星を r, ϕ, t 座標で追跡することができる。このような地図を図 9 に示した。

シュワルツシルト記録係は軌道を引く。

図 9 のシュワルツシルト地図は要約であり、人工物でもあり、記録装置であることに注

シュワルツシルト地図は記録装置である。

意しよう。局所的に記録された各々の事象を表しているのだが、誰もこの全軌道を直接観測していない。r 座標と t 座標を普遍的言語としているために払われる代償は、直接の経験を喪失することである。道路地図上には誰も住んでないが、道路地図を使って土地を表し、旅行を計画できる。同じように、座標 r, ϕ, t は時空のシュワルツシルト地図上の目盛りであり、これらの座標系を使えば、重力源の球対称面の外側の全時空の事象を特定できる。シュワルツシルト地図によってブラックホールの周りを航行することができる。

宇宙船の飛行士が事象のデータをシュワルツシルト記録データに変換しようと思ったとき、推進力のない宇宙船の内側で何を観測すればよいのか？ 特殊相対論を使って宇宙船の座標間隔を通過中の球殻の値に変換することから始める。そうすれば、球殻観測者は結果を遠方の記録係に伝達することができる。

r と ϕ, t は記録係座標系である。

まとめると、全領域の座標値 r, ϕ, t は記録することに意味を見出すことができる。座標 r, ϕ, t には誰もいないし、誰もそこで働いてないし、誰も 3 つの座標を広く張って直接データを取っているわけでもない。記録機器やデータバンク、簿記用紙、表作成機、国際語などを備えた会計係システムを形成し、地球や月、太陽、ブラックホールを取り囲む全時空領域での事象と運動を記述するための時空図の基礎としている。この理由から r, ϕ, t を**記録係座標**と呼ぶ。記録係座標の強さはその普遍性にあり、弱さは実験から直接得られるデータのほとんどが分断されていることにある。

球殻系や自由浮遊系で生活することができる。

それに対して、人々は自由浮遊系や球殻系で住んで働くことができ、彼らが平坦時空にいるかのようにデータを取り分析する。残念なことに時空の限られた断片の中でだけそうすることができるのである。

まさか。図 9 に示された軌道全体を直接見ることができないなんて。ブラックホールから遠く離れたところにいれば、人工衛星がブラックホールへ向かって落ちて行くのを直接目で見ることができるのではないか。

確かにそうだ。少なくとも人工衛星がブラックホールの地平線にたどり着くまでは全軌道を見ることができる。しかし目で見ているものは軌道の座標値 r, ϕ, t ではない。まず第一に、人工衛星によるフラッシュの発光とそれを目で見る瞬間との間には時間差がある。人工衛星が遠ざかっていくにつれて、または重力の窪みに深く落ちるにつれて、相対的な時間のズレは大きくなっていく。
第二に、これまで述べてこなかった効果もある（図 10 を見よ）。光は重力場によって曲げられる。アインシュタインは太陽を通り過ぎる星の光の振舞いを予測し、1919 年エディントン（Arthur Eddington）はそれを確かめ、アインシュタインの名声をあっという間に世界中に広めた。光は太陽の近くでは小さくしか曲がらないが、ブラックホールの周りでは劇的に曲がる（第 5 章とプロジェクト D 「アインシュタインリング」）。人工衛星はそのままの位置ではなく、別の方向に見えることになる。

視覚的形状は歪む。

ブラックホールの近くでは視覚的な形状も変わり得る。それは原理的に新しいことではない。特殊相対論の基準座標系として作った物差しと時計の格子を組み立て、観測者が記録時計からデータを集めることに制限を加えた（第 1 章、1.9 節）。目で見た事象を報告

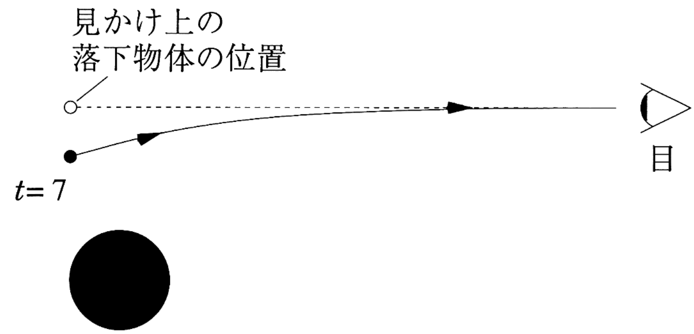


図 **2.10** シュワルツシルト地図。図 9 で示された落下物体（黒丸）から遠方時間 $t=7$ で放射されたフラッシュ光の軌道（太い実線）を表している。外側に進むと、光は曲げられ、遠い観測者にはフラッシュが別の位置で発光されているように見える（破線と白丸）。

するにあたって、観測者に特に警告する。なぜ警告するのか？ 光の速さは有限だからだ。時計格子で測った場合、先に起きた遠くの事象と後に起きた近くの事象を考えると、近くの事象からの光がまず観測者の目に届き、そのずっと後に遠くの事象からの光が目に届くことがある。観測と記録の過程で混乱が起き、事象の順番を取り間違えてしまうと、それを分析するのは容易ではない。

同じように光の遅れの問題はブラックホールを回る物体を目で見るときにも起きる。時空曲率によって起きた光の曲がりりによる方向の誤解（図 10）が光の遅れに加わる。

ブラックホールの近傍における光の進み方を知ることによって（第 5 章）、目で見る観測からシュワルツシルト地図を再構成することができるかもしれない。しかし、このような再構成はシュワルツシルト地図を直接見るのとは全く異なる。

シュワルツシルト計量は事象の位置を決める普遍的言語である。

以降の章で、記録係座標 r と ϕ, t を使って、ブラックホール近くの人工衛星と光のフラッシュの軌道を予測する。これらの座標系で軌道のシュワルツシルト地図をつくる。シュワルツシルト地図のどんな軌道の背後にも、自由浮遊観測者や球殻観測者が行った観測や予測がある。シュワルツシルト計量は、直接測定する観測者の座標系（球殻観測者と自由浮遊観測者）の間や、それらの観測者とシュワルツシルト記録係の間の翻訳作業の中心となっている。

2.12.4 シュワルツシルト格子

回転していない球対称物体の周りの時空について学んできたが、それを使うと、原理的に**シュワルツシルト格子**を組み立てることができる。シュワルツシルト格子は重力中心に対して静止しており、事象のシュワルツシルト座標 r, ϕ, t の値を地平線まで直接読み取

ることができる。換算円周 r の値は球殻毎に記される。遠方時間を刻む時計を各球殻上にばらまく（54 ページのボックス）。粒子が運動する平面上で、ある 1 つの方向を選んで方位角 0 の軸とし、球殻上に方位角 ϕ の目盛をつける。事象近くの球殻観測者と自由浮遊系観測者は事象の起きた球殻の位置からシュワルツシルト座標 r と ϕ を直接読み取り、事象近くの球殻上に置かれた遠方時計の時刻 t を読み取る。

シュワルツシルト格子を地平線から無限遠に構築する。

このシュワルツシルト格子は、地平線の近くから外側に向けて無限遠へあらゆる方向に伸ばすことができる。シュワルツシルト記録係は球殻系や自由浮遊系からの翻訳を必要とせずシュワルツシルト座標の値を受け取り、記録し、操作する。観測に関わっている人々はシュワルツシルト計量とその予言を理解し、すべての位置を記述するわかりやすい系として使う。この時計と球殻の集合を「シュワルツシルト観測者」と呼ぶことがある。

この章で 3 つの座標系の考えを理解した。だが、シュワルツシルト格子だけでは不十分だという理由がよくわからない。シュワルツシルト格子から、近くのシュワルツシルト時計を見て、方位角方向の距離を直接測り、半径方向の距離を計算することにより、時間と空間を測定することができ、さらに各実験者が合意を得ることができる。したがって、測定値をある座標系から別の座標系へ翻訳する必要はない。シュワルツシルト格子だけですべてうまくいくではないか。

よい指摘だ。実験を設定し、その結果を予測するためにシュワルツシルト座標だけを使うことに誰も口をはさまないだろう。そして観測値は予測できるだろう。実験者はブラックホールの地平線の外側の領域全体に広く配置され、互いにつじつまが合い便利なようにすべてがお膳立てされている。だが、利便性を得たために犠牲にしたものがある。これから述べる犠牲を受け入れられるだろうか？ 時間の基準は原子の特殊な性質に基づいている。遠方シュワルツシルト時間系を使って測ると、ブラックホールの近くで（地球の近くで）原子時計は「ゆっくり進」み、直接測った球殻間の半径距離は、r の値の差よりも大きい（一方、直接測る方位角方向の距離は、シュワルツシルト座標の差から正しく予言できる）。時空が曲がっているため、測定棒は方位角方向に向けたときと、半径方向に向けたときで長さは「ゴムのように」違ってしまうのだろうか。時空が曲がっているために、引力中心の近くの「原子時計」の進み方は遠く離れたものとは変わってしまうのか。概して「現実性」についてこのような疑問は、そこにいる人々には興味がない。どんな視点に立って予測しようとも、彼らにとって正しければそれでいいのだ。ゴムのような測定棒と時間の変わる時計を持つシュワルツシルト格子を使っても正しく予測できる。一方で、ブラックホール付近で静止して観測するとき、原子時計が規則的に進むと仮定すれば、よりいっそう納得しやすくなる。この場合、当然局所的観測者は、局所的な測定棒と原子時計を備えた球殻を使う。各座標系にはそれぞれ利点があり、時空構造に対してそれぞれの視点を持っている。我々の意見では、頭の中で座標系から座標系へ跳び移ることを身につけてしまえば、一般相対論研究者としての人生は楽しくなる。さらに詳しくは、ソーン（Kip Thorne）の “Black Holes and Time Warps,” Chapter 11, What Is Reality を見よ。

2.13 まとめ

シュワルツシルト計量

一般的に計量を使えば、時空を完全に記述することができる。つまり、物差しと時計を使えば測定値と時空曲率が求められる。平坦時空の計量は、特殊相対論の研究で重要な位置を占めている。だが、特殊相対論では重い物体の周りの時空を大域的に記述することはできない。一般相対論にはそれができるため、重力理論という名が冠されている。

シュワルツシルト計量で記述できる時空は、回転せず電荷のない重い球対称物体の表面の外側であり、回転せず電荷のないブラックホールの外側の時空である。

いくつかの取り決めを守れば、シュワルツシルト計量は理解しやすく使いやすい。

1. **面上の人工衛星の運動**　シュワルツシルト幾何上を運動する光のフラッシュやテスト粒子は、ブラックホールの中心を通る平面に留まり続ける。この面上でそれらの運動を記述しようとすると 2 つの空間次元に時間を加えなければならない。
2. **極座標**　中心に対する運動は極座標 r と ϕ で簡単に記述できる。例えば、2 次元の平坦時空の計量は、直交座標の形

$$d\tau^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 \qquad \boxed{\text{平坦時空}} \quad (2.34)$$

から、極座標の形

$$d\tau^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\phi^2 \qquad \boxed{\text{平坦時空}} \quad (2.9)$$

へ移ることができる。
3. **メートルの単位で測った質量**　惑星や星、ブラックホールの質量 M をメートルの単位で測定する。(2.5) 式を使えば、キログラムの質量 M_{kg} からメートルの質量 M にすることができる。変換則は具体的にニュートン力学の重力定数 G と光速 c を使うと

$$M = \frac{G}{c^2} M_{\text{kg}} = \left(7.424 \times 10^{-28} \frac{\text{メートル}}{\text{キログラム}}\right) M_{\text{kg}} \qquad (2.5)$$

となる。長さの単位で太陽質量は 1.477 キロメートルで、地球の質量は 0.444 センチメートルになる。
4. **換算円周としての半径**　ブラックホールがあると、物体または人工衛星が半径方向を直接測定すること不可能になる。その代わり、半径を $r = (\text{円周})/2\pi$ として定義する。この円周はブラックホールや引力中心を同心とする球殻の大円を測定した値である。この過程を思い出させるため、r を換算円周と呼ぶ。
5. **遠方時計で測定する時間 t**　時計に作用する曲率の効果を避けるために、記録係時間または遠方時間と呼ばれる時間を計算する。それは、引力物体からずっと離れた平坦

時空に置かれた時計で測定する時間になるだろう。遠方時間に記号 t を使う。光のフラッシュは時計の進みを比較するために使うが、遠方時計と曲がった時空領域にある時計の交信にも使う。

シュワルツシルト計量の予言

記法の単純化の取り決めにしたがうと、時間的な形のシュワルツシルト計量は

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} - r^2 d\phi^2 \tag{2.10}$$

と書くことができる。この計量は互いに近くで起きる事象の間隔の「測定」を表す。これら2つの事象の選び方を変えて測定値を予測し、実験で確かめることができる。

予測1. 重力赤方偏移 2つの事象として、ブラックホールの近くの球殻で静止している時計の刻む音を選ぶ。静止するということは事象間の空間間隔が0であることを意味する：$dr = d\phi = 0.$（座標系の同じ場所で起きる事象間の時間として定義される）固有時 $d\tau$ は球殻時計で読まれる dt_{shell} である。シュワルツシルト計量を使うと、球殻時計の経過時間と遠方時計の経過時間の関係がわかる：

$$dt_{\text{shell}} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} dt \tag{2.19}$$

この式を評価するとき、時計の刻む音の代わりに、r の球殻から外側に放出される定常波の周期を使うことができる。遠くの観測者が測定する周期 dt は、発信する時計のところで測定する周期 dt_{shell} よりも大きくなる。長い周期の可視光は赤い光である。そのため、この効果の一般的な名称を重力赤方偏移とする。

予測2. 空間曲率 物差しの両端が半径方向に向けて2つの同心球殻上に当てて置き、そこで2つの事象が起きるとしよう。これらの2つの事象が遠方時間で同時に起きたとしよう。これらの2つ空間的事象を分析するためには、シュワルツシルト計量の空間的な形式を使う：

$$d\sigma^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} + r^2 d\phi^2 \tag{2.11}$$

この例では $dt = d\phi = 0$ であり、固有距離 $d\sigma$（それらが同じ時刻で起きる系で、間隔として定義される）はちょうど球殻観測者によって測定される半径方向の間隔

$$dr_{\text{shell}} = \frac{dr}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2}} \tag{2.12}$$

になる。球殻観測者が測定すると、球殻間の距離 dr_{shell} が 2 つの球殻の換算円周の差 dr よりも大きくなる。

基準座標系

一般相対論ではどんな座標系でも使える。我々は目的に合わせて 3 つの座標系を選んだ。局所自由浮遊系と球殻上の局所系、それにシュワルツシルト座標（r, ϕ, t）を使う大域系。観測者は自由浮遊系と球殻系で直接測定することができるが、あくまで局所的である。それに対して、シュワルツシルト座標系では、重い物体の近くの時空で起きる事象をすべて記述できるが、誰も直接測定していない。そのため、他の観測者が測った事象を記録し分析する人が必要で、その人たちにはシュワルツシルト記録係という言葉を使う。

球殻観測者と、球殻を通過する自由浮遊観測者はローレンツ変換を含む特殊相対論を使うと、互いの局所測定値を比べることができる。球殻観測者とシュワルツシルト記録係は (2.12) 式と (2.19) 式を使う。方位角方向の距離 $rd\phi$ は両系で同じである。

想像上のことだが、球殻のシュワルツシルト格子を構成できる。それには換算円周 r と角度 ϕ が刻まれており、遠方時間 t が記録できる時計で覆われている。シュワルツシルト格子は原理的に地平線近くから始まり、（孤立物体から）外側に無限に広がっている。地平線外のあらゆる事象のシュワルツシルト座標系はこの格子を使って直接読むことができる。球殻と時計の集まりを「シュワルツシルト観測者」と呼ぶ。

ブラックホールは胡散臭いだけだった

> 1920 年代から 1930 年代にかけて、世界で最も名高い一般相対論の専門家はアインシュタインとイギリスの宇宙物理学者エディントン（Arthur Eddington）であった。他の人々も相対論を理解していたが、アインシュタインとエディントンはその知的な方向性を雰囲気的に決めていた。そして極一部の人がブラックホールをまじめにとりあげようとしたが、アインシュタインとエディントンはそうしなかった。ブラックホールは胡散臭いだけだった。途方もなく奇怪で、宇宙がどのように振舞うべきかは、アインシュタインとエディントンの直観に反するものだった。我々は今日ブラックホールの考えにすっかり慣れてしまっているので、アインシュタインがどういうわけでブラックホールについて語らないのか、なぜブラックホールそのものやブラックホールができる爆縮を無視するのか、と疑問に感じる。このような疑問が生じるのは、... 1920 年代 1930 年代のほとんどすべての人の物の捉え方を知らないことの表れである。十分コンパクトな天体が必ず爆縮し、それによってブラックホールができるなんて誰にも思いよらなかったのだ。
>
> —ソーン（Kip Thorne）

2.14 参照文献

アインシュタインの一般相対論の実験的実証を面白く読みやすくレポートにしたものについては、Clifford M. Will の *Was Einstein Right? Putting General Relativity to the Test*, Second Edition, Basic Books/Perseus Group, New York, 1993 を見よ。

人体に作用する潮汐加速度の効果を図に描いたものとして、Larry Niven の *Neutron Star*, Del Ray Books, Ballantine Books, New York, 1968 がある。実際は、宇宙飛行士の危険性は物語に書かれているものよりもずっと高い。

アインシュタインの場の方程式の底流をなす物理学的数学的な論拠を明解に述べたものについては Chandrasekhar の "On the 'Derivation' of Einstein's Field Equations," 1972 年 *American Journal of Physics,* Volume 40, 224–234 ページを見よ。

シュワルツシルト計量の考えられる可能な導出に関しては、Ronald P. Gruber, Richard H. Price, Stephen Matthews, William R. Cordwell, Lawrence F. Wagner の "The Impossiblity of a Simple Derivation of the Schwarzschild Metric," 1988 年 *American Journal of Physics*, Volume 56, 265–269 ページを見よ。

最初で行った引用は、アインシュタインの一般相対性理論の論文 "The Foundation of the General Theory of Relativity," からで、*The Principle of Relativity* として翻訳され再版されたものに含まれている。118 ページ。著者は H. A. Lorentz, H. Weyl, H. Minkowski で、Dover Publication, New York, 1952.

28 ページのアインシュタイン（Albert Einstein）の引用は、Paul Arthur Schilpp 編集の *Albert Einstein:Philosopher-Scientist*, Library of Living Philosophers, Evanston, IL, 1949, 65–67 ページからのものである。(第二版 1951 年)

30 ページの図 2 とその説明は Charles W. Misner, Kip S. Thorne, John Archibald Wheeler の *Gravitation*, W. H. Freeman and Company, New York, 1973 年 4 ページを書き換えたものである。この章のいくつかのパラグラフはこの本のものを書き換えたものである。その他では、John Archibald Wheeler の *A Journey into Gravity and Spacetime*, W. H. Freeman and Company, New York, 1990 年からのものである。

31 ページと 65 ページの引用はソーン（Kip Thorne）*Black Holes and Time Warps: Einstein's Outrageous Legacy*, W. W. Norton Company, New York, 1994 年 111, 134, 137 ページからである。彼の本の 111 ページから未編集の引用をする：「したがって、空間と時間の性質について大きく異なった視点をもつアインシュタインとニュートンは、中心に向けて落下している物体が衝突する原因をつくる媒体について、非常に異なった名をつけた。アインシュタインは時空の曲率と呼び、ニュートンは潮汐重力と呼んだ。しかし、たった一つの媒体があるだけだ。したがって、時空曲率と潮汐重力は、異なった言語で表されているが、正確に同じものでなければならない」

32 ページのコペルニクスの木版画は、トビーアス・シュティンマー（Tobias Stimmer）に

よるもので、Owen Gingerich 編集の *Nature Scientific Discovery*、Smithsonian Institution, Washington, D. C., 1975 年の中の John Archibald Wheeler の "The Universe as Home for Man" にある。図の説明は、Charles Gillispie 編集の *Dictionary of Scientific Biography,* Scribner's, New York, 1971 年からである。文の順番は替えてある。

39 ページの銀河系の中心のブラックホールの質量について。R. Genzel, A. Eckart, T. Ott, and, F. Eisenhauer, "On the Nature of the Dark Mass at the Center of the Milky Way," *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society,* Volume 291, 219–234 ページ, 1997 年; A. Eckart, R. Genzal "Stellar Proper Motions in the Central 0.1 pc of the Galaxy," *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Volume 284, 576–598 ページ 1997 年; A. M. Ghez, B. L. Kelin, M. Morris, and, E. E. Becklin, "High Proper-Motion Stars in the Vicinity of Sagittarius A*: Evidence for a Supermassive Black Hole at the Center of Our Galaxy," *The Astrophysical Journal*, Volume 509, 678–686 ページ, 1998 年 12 月 20 日。

43 ページのシュワルツシルトへのアインシュタインのコメントはすべて D. Howard and J. Stachel, *Einstein and the History of General Relativity,* Birkhauser, Boston, 1989 年 213 ページにある。

48 ページのホーキング（Stephen Hawking）の引用は C. DeWitt, B. S. DeWitt の *Black Holes*, Gordon and Breach, New York, 1973 年にある "The Event Horizon" からである。*Hawking on the Big Bang and Black Holes,* Advanced Series in Astrophysics and Cosmology, Volume 8, World Scientific, New York, 1993 年 34 ページに再版されている。

49 ページの図 6 は Kip S. Thorne, Richard H. Price, Douglas A. MacDonald の *Black Holes: The Membrane Paradigm*, Yale University Press, New Haven, 1986 年 16 ページからである。

54 ページの John Wheeler の引用は、*At Home in the Universe*, AIP Press, Woodbury, NY, 1994 年、132 ページ。

Alberto F. Viscarra から、考える人と鳥を交換したらよいと勧められた。

この章の練習問題 8 の引用：John Archibald Wheeler と Kenneth Ford, *Genos, Black Holes, and Quantum Foam,* W. W. Norton, New York, 1998 年 300 ページ。

第2章の練習問題

1. 球殻の間の固有距離

太陽よりも少し大きな質量 $M = 5$ キロメートルのブラックホールがある。ブラックホールを 2 つの同心球殻が取り囲んでいる。内側の球殻の r 座標は r で、外側の球殻は $r + dr$ である。$dr = 1$ メートルのとき、球殻上の観測者が直接測定する半径方向の間隔 $d\sigma = dr_{\text{shell}}$ はいくらか。以下の 3 つの換算円周 r の場合について答えよ。

A. $r = 50$ キロメートル
B. $r = 15$ キロメートル
C. $r = 10.5$ キロメートル

2. 太陽をかすめる

太陽を取り囲む 2 つの球殻に関する 2.4 節の文章の内容を確かめよ。内側にある換算円周 $r_1 = 695980$ キロメートルの球殻はちょうど太陽表面をかすめる。外側の球殻は換算円周で 1 キロメートル大きい。つまり $r_2 = 695981$ キロメートルである。これら 2 つの球殻の間を直接測ると、1 キロメートルよりも 2 ミリメートル大きくなることを確かめよ（仮に格子が建てられたとしても、沸き立った表面から爆発やフレアが数千キロも立ちのぼっているため、この問題は少々現実味がない）。ヒント：$|x| \ll 1$ で $|nx| \ll 1$ のときの近似式

$$(1 + x)^n \approx 1 + nx$$

を使え。べき乗 n は正か負の整数または分数である。

3. 重力赤方偏移

太陽の質量にほぼ等しい $M = 1.5$ キロメートルのブラックホールを考える。換算円周 r の球殻に立っている観測者が波長 400 ナノメートル（4×10^{-7} メートル：紫色）のレーザービームを半径方向外向きに放つ。この光は $2M$ よりずっと大きな半径の観測者に受信される。この観測者が受信した光の波長はいくらか。以下の場合について考えよ。赤色の波長は 700 ナノメートルで、通常の単位では

$$\frac{(\text{波長})}{(\text{周期})} = \frac{\lambda}{T_{\text{sec}}} = c$$

の関係がある。3 つの場合について考えよ。

レーザーが放射される球殻の換算円周 r が以下のとき

A. $r = 20$ キロメートル
B. $r = 5$ キロメートル
C. $r = 3.01$ キロメートル
D. 推測：光源が半径方向ではなく、別のある方向に向けられたとする。しかし、レーザービームはまだ遠方にいる観測者に届いている。この観測者が測定すると A, B, C で計算したものと同じ波長が得られるだろうか。また、もともとの半径方向とは別の方向にあると、波長は変わるだろうか。

4. 球殻はいくつある？

あなたがオフィスに着いた時、ブラックホール建設の社長が待っていた。彼は激昂していた。

「おまえはおれを破産させようとしているのか」

と彼は叫び

「俺はブラックホール アルファを中心として球殻を建設するという契約書にサインした。球殻を地平線に向かって 1 メートル間隔でつくっていく。俺のところの相対論屋は、地平線の外側のどこから始めても、そこから地平線までに必要な球殻は無限個になると言っている。そんなにたくさんのものを造る材料などあるわけがない」

「ちょっと落ち着いてください」

とあなたは言い

「ブラックホール アルファの地平線の半径は $r = 2M = 10$ キロメートル $= 10000$ メートルです。$r = 10001$ メートルの換算円周から始めて、10002 メートル、10003 メートルとし、11000 メートルで終わって、1000 の球殻を造ることに同意しました。どこが問題なんですか」

「よくわからん。たぶん俺たちの建設方法を言えばわかってもらえるかもしれん。俺の作業ロボットは、完成した球殻から 1 メートルの棒を鉛直に（半径方向に）吊り下げ、正確に 1 メートルの長さを測っているのだ。それで、棒の端をすぐ下の球殻の上で水平に（接方向に）横たわる角材と接合する」

「それで、あなたのブラックホール建設会社は不必要で大きな出費に迫られているということですね」

そしてあなたは

「お助けできると思います」

と請け負った。

A. 1000 個の球殻を正しく建てるという契約を履行するために、どのように建設方法を変更したらよいか、ブラックホール会社の社長に説明せよ。はっきりと。でも、収拾がつかなくなることがないように。

B. 最も内側の球殻とその次の球殻（2 番目の球殻）の間隔を直接評価せよ。必要な式の中では、最も内側の球殻の半径を使え。そして、次に大きな半径の球殻について計算せよ。

C. 今度は 2 番目の球殻の半径を使って、最も内側の球殻と 2 番目の球殻の間隔を直接評価せよ。

D. 任意：B と C の結果に満足できなければ、微積分を使って正しい計算をせよ。

5. 希薄なブラックホール

ブラックホールの記述にはあまりに終末的なものが多いので、ブラックホールは極端に高密度な物体であるとの印象を持っている人が多いのではないだろうか。もちろんブラックホールは全てにわたって高密度ではない。すべての物質は中心の破砕点にすぐに吸い込まれるからである。それでも人工的な「平均密度」について言及することはできる。「平均密度」として、全質量 M を半径 $r = 2M$ の球のユークリッド体積で割ったもので定義する。この定義に基づけば、一般相対論ではブラックホールの平均密度が必ずしも大きいとは限らない。この練習問題では、我々が呼吸する大気と等しい平均密度（1 立方メートル当たり 1 キログラム）を持つブラックホールを設計する。計算はすべて 1 桁の精度で行え。厳密さよりも見当をつけることが大切なのだ。

A. ユークリッド幾何における球の体積の式

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$ [ユークリッド]

から、半径 r の球に含まれる空気の質量 M の方程式を求めよ。変換定数 $G/c^2 = 7 \times 10^{-28}$ メートル/キログラム（2.6 節）を使って、この質量をメートルで表せ（ここで使っている体積の公式はユークリッド幾何学のものであるが、これを曲がった空間の幾何学に適用する。したがって、この練習問題はより洗練された解析に向けた最初のステップになる）。

B. このブラックホールの地平線のシュワルツシルト半径を $r = 2M$ とする。$2M$ の数値はメートルでいくらになるか。

C. 答えを太陽系の半径と比較せよ。冥王星の平均軌道半径はほぼ 6×10^{12} メートルである。

D. 設計したブラックホールの質量は太陽の何倍か。

6. ニュートンの法則にしたがって伸びる宇宙飛行士

ブラックホールの中心へ足から落下すると、物理的な張力を感じず、快適である。確かにこれは正しく、下向きに加速させる「重力」は感じない。しかし、足を引っ張って頭を

引き離し、高品質のコルセットのように両側から胴体を引き絞るような潮汐力は感じてしまう。いつこのような不快な潮汐力が生じるようになるのか。この質問にはまだ一般相対論を使って答えることができないのだが、ニュートンならば相談にのってくれるだろうから、訊いてみよう。この練習問題で数値評価は 1 桁で十分だ。

A. 公式をスリムに：$g_{\rm conv}$ を通常の単位 メートル毎秒毎秒の局所的な重力加速度としよう（これ以降、添字 "conv" はこの意味で使う)。m に $g_{\rm conv}$ をかけたものはニュートンの法則での重力である（37 ページの (2.2) 式)。ニュートンの法則において、添字 $M_{\rm kg}$ を使うことで引力中心の質量がキログラムであることを忘れないようにしている。ニュートンの運動方程式の両辺で m（身体の質量）を打ち消し、c^2 で全体を割り単位を変換すると、重力の局所加速度の公式が $g = M/r^2$ となることを示せ。ここで M はメートルの単位（38 ページの (2.5) 式）で、$g = g_{\rm conv}$ も幾何学単位である。メートル/メートル ^{2}=メートル $^{-1}$ である（注意：べきがマイナス 1 である)。

B. 地球表面の $g_{\rm conv}$ を幾何学単位に変換し、それが $g_{\rm Earth} = 10^{-16}$ メートル $^{-1}$ であることを示せ。この練習問題の残りでこの数値を使え。

「不快な」とはどういう意味なのか。我々が不快というのは、頭が地上の重力の半分で上方に引っ張られ、体の真中は自由浮遊系で（側面から引き絞られることは除く）足が地球の重力の半分で下に引っ張られるときとする。言い替えると、頭と足の間の重力加速度の差が地上で測った重力加速度に等しくなるときである：$dg = g_{\rm Earth}$.

C. A で求めた局所重力加速度 g を r について微分し、M と r で表せ。

D. どれくらいの質量のブラックホールに落下しようと思っているか。$M = 10$ キロメートル $= 10000$ メートルを仮定し、太陽質量の 7 倍程度とする。頭と足は 2 メートル離れていると仮定し基準にしたがって、不快となる半径 $r_{\rm ouch}$ を求めよ。この半径と地球の半径 6.4×10^6 メートルを比べよ。

E. この半径からさらに中心に落下し続けると、この不快感は増えるのか、減るのか、それとも変わらないか。

F. 無限遠から静止状態で落下すると仮定する。不快になる半径 $r_{\rm ouch}$ にたどり着いたとき、ニュートン力学にしたがうと、どれくらいの速さになっているか。この速さを光速と比べよ。

G. 速さがこの半径から中心まで F で求めた値のままであるとして、$r_{\rm ouch}$ から中心にたどり着くまでに相当する（最大の）時間をニュートンにしたがってメートルで求めよ。これが、あなたが味わう不快な時間の最大値である。

H. ニュートンにしたがって、この不快な最大時間を秒で表せ。

ノート 1：もしこれらの方程式を通じてブラックホールの質量として記号 M を使うと、G と H の不快な最大時間を表す式の中で M が打ち消すことがわかる。言い替えれば、

無限遠で静止状態から落下したとき、ニュートンにしたがうと、不快な時間はブラックホールがどんな質量でも同じになる。すべての質量に対する不快時間の同値性は一般相対論でも成り立つ。

ノート 2：あらゆる時刻から中心までの腕時計時間は一般相対論を使って第 3 章で調べ、そこで練習問題として行う。不快な時間はプロジェクト B の 7 節「ブラックホールの内側」で調べる。

7. チェサピーク湾上空の一般相対論

1975 年 11 月 22 日アレイ（Carrol Alley）と共同研究者らの計画した実験として、米軍 Navy P3C 対潜水艦パトロール機がチェサピーク湾の上空を高度 7600 メートルから 10700 メートルで 15 時間飛行した。飛行機は原子時計を載せており、地上にある同じ時計とレーザーパルスによって、時間を比較している。飛行中、飛行機の時計は地上にある時計と比較して 47.2 ナノ秒（47.2×10^{-9} 秒）進んだ。この時間差を分析するための計器がある。飛行機は平均高度 900 メートルを非常にゆっくり飛び、ちょうど失速寸前だとすると、相対速度による時間の遅れは無視できる（実際、時間の遅れは一般相対論的効果の 10 パーセントになる）。地上の時計を球殻時計と呼び飛行機が 9000 メートルの高度に留まっている時刻を t_{shell} とし、対応する遠方時間を t とする。(2.19) 式から

$$t_{\text{shell}} = \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{1/2} t$$

が得られる。

A. t_{shell} を r で微分せよ（飛行機の高度 h を r に加えるべきだが、地球の半径 r よりもずっと小さいため、h を無視する）。(2.12) 式と (2.19) 式を使い、dr から dr_{shell} に変換し、t から t_{shell} に変換する。dt_{shell} と dr_{shell} の間の関係が

$$dt_{\text{shell}} = \frac{M\,dr_{\text{shell}}t_{\text{shell}}}{r^2}\frac{1}{\left(1-\dfrac{2M}{r}\right)^{1/2}}$$

となることを示せ。

B. さらなる近似：ユークリッドの方法を使って地球の半径を測定するとき、地球の換算円周 r と半径 $r=6.4\times10^6$ メートルの差を無視する。この r と長さの単位で表した地球の質量 $M=4.4\times10^{-3}$ メートル（2.6 節）に対して、$2M/r$ が 1 に比べて完全に無視でき、上式の最後の因子が 1 とできることを示せ。地上から飛行機までの高度を $dr_{\text{shell}}=h$ とすると、、結果は

$$dt_{\text{shell}} \approx \left(\frac{Mh}{r^2}\right)t_{\text{shell}}$$

となる。

C. $h = 9000$ メートルとし、M と r の値をこの近似式に代入せよ。この括弧の中の量は無次元であり、$t_{\rm shell}$ と $dt_{\rm shell}$ が同じ単位であるかぎり、望みとあらばどんな単位でも使うことができる。$t_{\rm shell} = 15$ 時間とし、地上の時計と飛行機の時計の時刻の差 $dt_{\rm shell}$ を計算し、結果をナノ秒（10^{-9} 秒）の単位で求めよ。P3C パトロール機で 15 時間運んだ後 載せていた時計と地球の時計との時間差を測定するとほぼ 50 ナノ秒にならなければならないことを示せ。

参照：Taylor and Wheeler, *Spacetime Physics*, 133 ページ。そこにはさらに参照文献がある。

8. ブラックホールの面積は決して減少しない

ホーキング（Stephen Hawking）は、ブラックホールの地平線の面積は決して減少しないことを発見した。この面積はユークリッド幾何の公式 $A = 4\pi r^2$ を使って計算される。以下の A と B の仮定のもとでこの発見の帰結について調べよ。

ノート 1：ブラックホールの地平線の面積が減少しないという法則は、孤立系の無秩序（いわゆるエントロピー）は減少しないという統計物理の法則と根本的な関係がある。Thorne, *Black Holes and Time Warps* の 422–426 ページと 445–446 ページ、Wheeler, *A Journey into Gravity and Spacetime*, 218–222 ページを見よ。

ノート 2：ホーキングの発見の例外がホーキング輻射なのだが、ブラックホールからエネルギーと質量をものすごくゆっくり取り出し、地平線の面積を減らす。29 ページのボックスを見よ。

2 つのブラックホールが衝突すると仮定する。1 つのブラックホールの質量は M で、もう 1 つの質量は $2M$ である。

A. まず、合体後のブラックホールの質量が初期の質量の単純な和として表されると仮定する。合体後のブラックホールの地平線の r は M の何倍になるか。地平線の面積はどうなるか。

B. 合体したブラックホールについて別の仮定をしてみる。ホイーラーとフォードに耳を傾けよう（*Geons, Black Holes, and Quantum Foam*, 300 ページ）：

> 2 つのパテのボールが衝突しくっついて一つになったとすると、新たにできたボールの質量は衝突したボールの質量の和となる。だがブラックホールではそうはならない。自転も帯電もしていないブラックホールが衝突し合体し、そのとき生じる重力波が消え去ると、新しくできた重いブラックホールの質量の 2 乗は合体したブラックホールの質量の 2 乗の和になる。つまり、2 つのブラックホールの質量を 2 辺とした直角三角形の斜面が合体してできたブラックホールの質量になる。2 つのブラックホールが互いにガッチリと結び付き合うことで起きる途方もない衝撃を思い描こう。互いに呑み込み合い、互いに重力波で

時空をかき混ぜる。そして、三平方の定理がこの究極の宇宙の渦巻に秩序をもたらすことに恐れおののけ。

以下の現実的なシナリオにしたがって、質量が M と $2M$ の 2 つのブラックホールが衝突したときにできる地平線の r の値を求めよ。また衝突の結果としてできるブラックホールの地平線の面積も求めよ。

C. A と B の結果はともにブラックホールの地平線の面積は減少しないというホーキングの法則にしたがうか。

D. どれくらいの質量が重力波として放射されるか。

9. ゼノンのパラドックス

エレア派のゼノン（Zeno. 紀元前 495 年ごろに生まれ紀元前 430 年ごろに没した）は運動のパラドックスをいくつか考え出した。そのうちの 1 つに、運動する物体は目的地点に着けないというのがある。目的の地点に着くのはその点の半分の距離に達した後なのだが、その半分の点にたどり着く前には、半分の半分に行かなければならない。これが延々と続き、ゴールに決してたどり着くことができない。

現代の読者、同じく名前がゼノンが地平線を越えることについて似たようなパラドックスを提起した。ゼノンは、この本の巻末公式一覧の (D) 式

$$dr_{\text{shell}} = \frac{dr}{\left(1 - \dfrac{2M}{r}\right)^{1/2}} \tag{D}$$

を使って dr_{shell} と dr の関係を述べた。そしてゼノンは以下のように主張する：「r が $2M$ に近づくにつれて (D) 式の分母は 0 になる。だから、近接する球殻間の距離は無限大になる。物体は、光速でさえも無限大の距離を有限の時間で進むことはできない。したがって、どんなものも地平線にたどり着き、ブラックホールに入ることはできない」以下の議論にしたがうか、他の別の方法を使ってもよいからこのゼノンのパラドックス現代版を解け。

ふつう相対論で問題になることは、誰が何を測定したかということである。地平線を越えるために、落下する物体は地平線外のすべての球殻を越えなければならない。各球殻の観測者は自分の球殻とその下の球殻の間の固有距離の増分 dr_{shell} を測定する。それで、その下にある球殻の観測者は自分の球殻とそのすぐ下の球殻の間の固有距離の増加を測定する。これらの増分を加え合わせることにより、地平線にたどり着くために運動しなければならない距離、「r_1 から r_2 の球殻によって測られる和の固有距離」を確立することができる。

下の半径 r_1 からその上の半径 r_2 まで (D) 式を足し合わ（積分）せよ（r_1 と r_2 はともに地平線の外側である）。積分表で探すと

$$\begin{pmatrix}\text{球殻観測者によって測られる}\\ r_1\text{から }r_2\text{までの固有距離の和}\end{pmatrix} = \left[r^{1/2}(r-2M)^{1/2} + 2M\ln\left\{r^{1/2} + (r-2M)^{1/2}\right\}\right]\Bigg|_{r_1}^{r_2}$$

となる。ここで ln は自然対数関数であり、この形は地平線上でまたはそれより大きな半径で正しい。自分の好きな値を r_1 と r_2 に入れ、自然対数の性質 $\ln B - \ln A = \ln(B/A)$ を使え。(この性質を使うことでも、自然対数の引数が単位のない数値になることがわかる。実際、そうでなければならないことだが)

さて、$r_1 \to 2M$ とし、球殻の共同研究者たちが測定する r_1 から r_2 までの距離が「球殻距離の和」であり、有限であることを示せ。これは (D) 式の右辺が $r = 2M$ で無限大になっても正しい。

球殻観測者は、落下する石が地平線にたどり着き地平線を越えると結論を下すだろうか。この練習問題で、どんな球殻から出発しても地平線までの「球殻距離の和」が有限であることが示されている。しかし、運動には距離だけでなく、時間もある— そして相対論では時間はみんなの抱いている期待にはしたがわない。上で計算された「球殻距離の和」を通過する落下者の「球殻時間の和」について何かコメントはないのか。第 3 章で、自由浮遊落下者がある速さで通過するのをすべての球殻の観測者が測定することが示される。その速さは地平線に近づいていくと連続的に増加する。落下者は球殻を次々に通り過ぎて行くが、それぞれの球殻観測者は自分の球殻からその下の球殻までの通過時間が有限になっている（無限大ではない）こと知る。これらの「有限時間の和」をとれ。この「和」という言葉は上の式を求めるときに使った積分と同じ意味を持っている。計算すると、球殻時間の積分は全時間に対して有限になる。よって、球殻観測者の仲間内では観測値は一致している。半径方向に落下している誰かが有限の「球殻時間の和」で通りすぎ、地平線をつっきる。Thank you! ゼノン。

プロジェクトA

GPS（全地球測位システム）

- **GPS**（全地球測位システム）はどのような仕組みになっているのか。
- **GPS** で自分自身の位置がどのようにして正確にわかるのか。
- この操作のうちで一般相対論はどの程度重要なのか。

アインシュタインと全地球測位システムの物語 .... ほど基礎科学が予測不可能な恩恵をもたらすという実例はないだろう。今度、あなたの乗った飛行機が悪天候の中で飛行場に近づいたとき「基礎科学はなんてよいものだろう」と驚き、安全に着陸したとき、アインシュタインとコックピットの中の GPS 監視者を思い起こすことだろう。

— ウィル（Clifford Will）

A.1 GPS の動作

あなたは一般相対論が日常の経験とかけ離れた事象としか関わっていないと思っているのではないだろうか。もう一度よく考えてみよう。あなたの命は、上空にある人工衛星に「耳を傾けている」携帯用の受信機によって守られている。このシステムによって、あなたは地球上のどこにいるのかがわかる。このプロジェクトで、一般相対論の補正なしではこのシステムが正しく作動しないことを知る。

GPS は 12 時間の周期で地球の円軌道を回る人工衛星 24 機からなるシステムであり、人工衛星は 6 つの軌道面上に等しい角度で配置されている。各人工衛星は原子時計を（7 つの予備の時計とともに）搭載し、位置を知らせる暗号を含んだ時刻合わせの信号を放っている。マイクロプロセッサー搭載の地上の受信機は少なくとも 4 つの人工衛星から送られる信号を分析することにより、自分の位置を表示することができる（高度、緯度、経度）。使用者の受信機の大きさは電卓程度で、100 ドル程度の値段で、水平位置の精度は約 25 メートルである。もともと人工衛星の信号は民間の受信機が強く影響を受ける「ふらつき」を含んでいる。軍事用受信機ならこのふらつきを消して読み解くことができるだ

ろう。2000 年春このふらつきは解消された。GPS 人工衛星はドライブや飛行、ハイキング、探検、救助、地図作成、地殻の地質学的研究などに徐々に浸透している。

空港の管制塔で GPS 受信機を 1 台使っており、着陸する飛行機でも 1 台使っている。2 つの受信機が接近すると、各受信機と上空の人工衛星の間を信号が伝達することによって生じる誤差を打ち消し、民間受信機が軍事用受信機より精度が悪いことの原因となっている人工衛星の信号に含まれる雑音も打ち消す。

結果として、管制塔と飛行機の相対的な位置の精度は 1～2 メートルになる。受信機の間の正確な位置関係を把握することができるので、どんな天候でも目隠した状態で着陸することができる。地上で飛行機の位置を監視することで（レーダーの電磁波信号では不可能）滑走路での衝突を避けられる。

GPS による時間合わせは極度に正確なため、一般相対論的効果はその性能に対して大きな意味をもつことになる。第一に、重力源を中心として別々の位置にある時計はそれぞれ別々の進み方をする。第二に、二つの人工衛星の運動と地球の回転を同時に考慮に入れなければならず、運動する人工衛星や地球の回転は第 2 章の静止球殻に当てはまらない。このプロジェクトではこれらの効果について調べたい。

このプロジェクトであなたが挑戦することは番号のついた質問に答えることだ（このプロジェクトの質問 1 は 80 ページにある）。ここの質問にはいくつか関連する疑問点が含まれている。質問には順に答えてもよいし、自分に義務として課してもよいし、興味によって飛ばしてもよい。

A.2 定常時計

地球は回転しており完全な球でもない。厳密には、シュワルツシルト計量は地球上空の時空には使えない。しかし、地球の回転はゆっくりなので、シュワルツシルト計量は全地球測位システムを分析する目的に対してよい近似として使うことができる。

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \dfrac{2M}{r}} - r^2 d\phi^2 \tag{A.1}$$

この式を 2 度使う。1 回目は軌道運動する人工衛星時計に、2 回目は地球の赤道に固定され、地球とともに回転する時計に適用する。地球の時計と人工衛星時計はともに地球の中心について一定の半径上で運動している。よって、各時計について $dr = 0$ とする。シュワルツシルト計量全体を遠方時間の 2 乗 dt^2 で割ると

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) - r^2 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) - v^2 \tag{A.2}$$

が得られる。ここで $d\tau$ は腕時計の刻みであり、どちらの時計にも使える。$v = r d\phi/dt$ は円軌道上の時計の接線方向の速度であり、遠方時間を使って測ってある。(A.2) 式をま

GPS の動作

GPS の目的は地球上で東西南北、高度の 3 次元の位置を決めることである。頭上の 3 つの人工衛星の信号からこの情報を得る。各人工衛星は自身の位置と発信時刻を暗号化して送る。受信機の時計は信号を受信した時刻を記録し、発信時間を取り出し、時間の経過、したがって（光速で）どれだけ遠くからやってきたかを決める。これは、人工衛星が信号を送った時刻における我々までの距離である。実に、これらの距離から各人工衛星の放射点を中心とする 3 つの球面が構成できる。我々の位置は 3 つの球面が交差する 1 点である。

もちろん、欠点はある。携帯受信機の時計は人工衛星搭載の原子時計と比べ、とても正確とはいえない。このために、上空の 4 番目の人工衛星からの信号を携帯受信機の時計の精度をチェックするのに使う。4 番目の信号によって、受信機は原子時計を持っているかのように、GPS 信号を処理できる。

異なった高度にある原子時計が交信する信号は、シュワルツシルト計量で表わされる一般相対論的効果から影響を受ける。これらの効果を無視すると GPS は使えなくなる。このプロジェクトでこれらの効果を分析する。

ず人工衛星について、$r = r_{\text{satellite}}$ と $v = v_{\text{satellite}}$, 人工衛星の時計の進み $d\tau = dt_{\text{satellite}}$ を代入し、書き下す。次に地球の時計に対して $r = r_{\text{Earth}}$, $v = v_{\text{Earth}}$, 地球時計の進みを $d\tau = dt_{\text{Earth}}$ とし、これらすべてに遠方時計の刻み dt を使う。人工衛星の式を地球の式で割ると、人工衛星と地球の時計で記録される時間の進みの比の 2 乗は

$$\left(\frac{dt_{\text{satellite}}}{dt_{\text{Earth}}}\right)^2 = \frac{1 - \dfrac{2M}{r_{\text{satellite}}} - v^2_{\text{satellite}}}{1 - \dfrac{2M}{r_{\text{Earth}}} - v^2_{\text{Earth}}} \tag{A.3}$$

となる。

我々が学んでいる一般相対論的効果は小さい。どれだけ小さいのか。何と比べて小さいのか。正確な一般相対論の表現はいつ使わなければならないのか。これらの疑問は分析の中心となるものなので、効果の大きさを粗く評価してみることには意味がある。今のところ近似の粗さについて心配する必要はないだろう。

まず、人工衛星の時計と地上の時計は運動してないとして始めよう。2 つの半径にある定常時計の進みに生じる差はどうなるだろうか。(A.3) 式は

$$\frac{dt_{\text{satellite}}}{dt_{\text{Earth}}} \approx \frac{\left(1 - \dfrac{2M}{r_{\text{saetllite}}}\right)^{1/2}}{\left(1 - \dfrac{2M}{r_{\text{Earth}}}\right)^{1/2}} = \left(1 - \frac{2M}{r_{\text{satellite}}}\right)^{1/2}\left(1 - \frac{2M}{r_{\text{Earth}}}\right)^{-1/2} \tag{A.4}$$

と書くことができる。12 時間の円軌道の半径は地球の中心から 26.6×10^6 メートルであることを質問 7 で示すことになる。この本の巻末公式一覧の定数表に地球の質量と半径の値がある。

このプロジェクトで近似式

$$(1+d)^n \approx 1+nd \qquad |d| \ll 1 \text{ かつ } |nd| \ll 1 \text{ のとき} \tag{A.5}$$

を何回も繰り返し使う。ここで 2 本の縦線は「絶対値」を表す。近似式 (A.5) は、べき数 n がどんな実数値でも、d と nd の絶対値が 1 よりもずっと小さい限り成り立つ。(A.5) 式をこの本では頻繁に使うため、最後のページに参照できるように (E) 式として書いておく。

質問 1　公式：高さによる時間の進みの差。 (A.4) 式の右辺の括弧に近似式 (A.5) を使うと

$$\frac{dt_{\text{satellite}}}{dt_{\text{Earth}}} \approx 1 - \frac{M}{r_{\text{satellite}}} + \frac{M}{r_{\text{Earth}}} - \frac{M}{r_{\text{satellite}}}\frac{M}{r_{\text{Earth}}} \qquad \boxed{v=0 \text{ のとき}} \tag{A.6}$$

となることを示せ。

質問 2　さらなる近似。 M/r_{Earth} と $M/r_{\text{satellite}}$ の近似値はいくらか。(A.6) 式の最後の項が右辺の他の項と比べて無視できるかどうかを吟味せよ。結果が

$$\frac{dt_{\text{satellite}}}{dt_{\text{Earth}}} \approx 1 - \frac{M}{r_{\text{satellite}}} + \frac{M}{r_{\text{Earth}}} \qquad \boxed{v=0 \text{ のとき}} \tag{A.7}$$

となることを導け。

質問 3　数値的近似、定常時計 (A.7) 式に数値を代入し以下の式の b の値を求めよ。

$$\frac{dt_{\text{satellite}}}{dt_{\text{Earth}}} \approx 1 + b \qquad \boxed{v=0 \text{ のとき}} \tag{A.8}$$

(A.8) 式によって表わされる b の値は人工衛星と地上の位置における進み具合の差である。この差は GPS の動作にとって無視できるか、それとも重要か。人工衛星の時計の調節が 1 ナノ秒（10^{-9} 秒）ずれるとする。1 ナノ秒で光の信号（またはラジオ波）は約 30 センチメートル進む。したがって数千ナノ秒の差によって困難が起きる。

質問 4　1 日後の同期時刻の食い違い。 1 日は 86 400 秒である。人工衛星の時計と地球の時計は高度の差だけで 1 日に有効数字 1 桁で約 50000 ナノ秒同期した時刻からずれる。3 桁の精度で正しい値を求めよ。

人工衛星時計は地上の時計と比べて、位置の効果だけで 1 日に 50000 ナノ秒くらい「速く」進むだろう。明らかに一般相対論は GPS 系の正しい作動に対して必要とされるのだ。一方で、2 つの位置における時間の進みの差の比率（少なくとも半径における差）は小さい。

位置の効果に加えて、人工衛星と地球の観測者の運動による効果も含めなければならない。どの方向で、これらの効果は結果に影響を与えるだろうか。人工衛星時計は、地球と

ともに回転する時計よりも速く運動する。しかし、特殊相対論によれば（不正確な表現だが）「運動する時計はゆっくり進む」。この予測は (A.2) 式と (A.3) 式の v^2 の負の符号と一致する。したがって、運動の効果のために人工衛星時計が地球の時計よりも速く進むことから、効果が弱められることが期待できる。要するに、速度の効果を考慮に入れると、人工衛星時計が地球時計よりも 1 日に 50000 ナノ秒よりは少ないが、速く進むと予想できる。この予想の最終結果をチェックする必要があるだろう。

A.3 時計速度

さて、より完全な式 (A.3) を GPS の解析に使うために地球と人工衛星時計の速度を考慮に入れる必要がある。方程式中の v_{Earth} と $v_{\text{satellite}}$ の値はどのようになり、この速度を誰が測るのか。今の場合、ユークリッド幾何学とニュートン力学から計算される速さを使うと、これらの速度の最も簡単な測定値を求めることができる。ニュートンは虚構の「絶対」時間 t を使っているが、その結果を後にもっと詳しく吟味しなければならない。

質問 5 赤道にある時計の速さ。 地球が太陽の周りを回り、1 日に 1 周（86400 秒に一周）地軸の周りを自転するとき、地球の中心は自由浮遊系にある。地球の中心に対して、赤道上に静止している時計の速さ v_{Earth} はいくらか。ニュートンの「絶対時間」t を使い、光速の何倍かで答えよ。

人工衛星の速さ $v_{\text{satellite}}$ はいくらか。ニュートンならば円運動する人工衛星の加速度は中心を向き、大きさは v_{conv}^2/r であると答えるだろう。v_{conv} はメートル毎秒のような普通の単位で測った速さのことである。加速度を人工衛星の質量 m にかけたものは地球が及ぼすニュートンの重力に他ならない：

$$\frac{GM_{\text{kg}}m}{r_{\text{satellite}}^2} = \frac{mv_{\text{conv}}^2}{r_{\text{satellite}}} \tag{A.9}$$

(A.9) 式から人工衛星の速さと円軌道の半径との関係がわかる。二番目の式は人工衛星の速度と軌道半径を 1 周期と結びつける。この周期 T は GPS 人工衛星の場合 12 時間である：

$$v_{\text{conv}} = \frac{2\pi r_{\text{satellite}}}{T_{\text{second}}} \tag{A.10}$$

質問 6 幾何学単位。 (A.9) 式と (A.10) 式で質量 M をメートルの単位に変換し、人工衛星の速さを光速の比に変換せよ。T を秒の単位のままで、2 つの方程式の間で半径 $r_{\text{satellite}}$ を消去し $v_{\text{satellite}}$ を M と T_{second} で表し数値で答えよ。

A.4 最後の計算

質問 7 ニュートンにしたがった人工衛星の半径と速さ。 周期 12 時間の円軌道上にある人工衛星の速さ $v_{\text{satellite}}$ を（光速との比で）求めよ。ニュートンとユークリッドにしたがって、この軌道の半径 $r_{\text{satellite}}$ の数値を求めよ。

さて、(A.3) 式のすべての項の数値を手に入れ、人工衛星と地球の時計の進み方の差を近似できるようになった。

質問 8 公式：時計の針の動きの差。 (A.3) 式の両辺の平方根をとれ。でもまだ数値を代入してはいけない。方程式の分子分母について (A.5) 式の近似を使え。分子を

$$d = -\frac{2M}{r_{\text{satellite}}} - v^2_{\text{satellite}} \tag{A.11}$$

とおき、分母については、d で添字を "Earth" に換えた同じ表現を使え。質問 2 と同じ方法を実行し、重要な項だけ残し、結果が

$$\frac{dt_{\text{satellite}}}{dt_{\text{Earth}}} \approx 1 - \frac{M}{r_{\text{satellite}}} - \frac{v^2_{\text{satellite}}}{2} + \frac{M}{r_{\text{Earth}}} + \frac{v^2_{\text{Earth}}}{2} \tag{A.12}$$

となることを示せ。

質問 9 時計の針の動きの差の数値。 (A.12) 式の各項に数値を代入せよ。有効数字 **2** 桁で、人工衛星の時計が地球の時計よりも 1 日に 39000 ナノ秒だけ速く進むようだ。有効数字 **3** 桁で答えよ。

A.2 節では、時計の進みの差は高度によるものだけだった。A.2 節の終わりで、一般相対論を駆使した扱いにより、高度だけの効果よりも時計の進みの差は小さくなることを予測した。質問 9 に答えることによりこの予想が確かめられる。以下の節ではこの解析で行った他の近似についていくつか調べる。

実用的な余談： アレー (Carroll O. Alley) が GPS を最初に設計した人たちと話し合ったとき、彼らに (A.12) 式の補正を 2 度適用させないよう説得するのにかなり苦労した。彼らのしていた 2 回というのは、1 回目は異なった高度で時計の進みの差を説明、2 回目は人工衛星から地球に送られる信号における周波数の青方偏移である。補正は 1 度だけである。さらに、この補正の「原因」が何であるかを区別する方法はない。ウィル（Clifford Will）が塔の上にある時計の進みと地上にある時計の進みの差を述べたとき、この問題について言わなければならなかったことに耳を傾けよ：

> よく質問されることは、発信機と受信機または時計本来の進みが変化するのか、または伝達の間に光の信号の周波数が変わるのか、である。答えは、そんなことはどうでもよいという

ことだ。この2つの質問は物理的に等しく、2つを区別する方法はない。発信機を塔から下に運び、受信機のそばに置くことで、発信機と受信機の進み方が一致するかどうかチェックするとしよう。すると実際に一致することを知ることになるだろう。同様に、塔の上に受信機をもっていき、発信機のそばに置けば、また一致していることを確認できるだろう。しかし重力赤方偏移を得るためには時計の高さを変えなければならない。したがって、時計の間の距離を伝わる信号によって、時計の進み方を比べなければならない。しかし振動数のズレが時計または信号によって起きているかどうかをはっきり決めることは不可能である。観測可能な現象にあいまいさはなく、受信した信号は青方偏移している。さらに深く知ろうとすると、観測的な意味なしで質問に答えることになる。これは、相対論の要となる点で、確かに現代物理学の多くで見られる点である。我々は観測可能で手順が決まっている量のみに注意を向け、答えられない問題は避けるべきである。

A.5 近似の正当化

円軌道上の人工衛星の速さと地上の時計の速さをユークリッド幾何学と「絶対時間」をもつニュートン力学を使って計算した。では、速さの式にある分子、つまり $rd\phi$ はシュワルツシルト幾何学でもユークリッド幾何学と同じである。シュワルツシルト時空の r の定義の仕方を考えればわかるだろう。ところが、分母の時間 dt はシュワルツシルトとニュートンでは異なる。特に、(A.3) 式を導出したとき、方程式の中の速さを遠方時間 dt の変化を使って計算するものと仮定した。人工衛星の軌道半径で構成される球殻と地上にある「別の」球殻を考えよう。そのとき、我々の作業は遠方時間 dt と球殻時間 dt_{shell} の差を評価することにまとめられ、それはこの本の最後の公式集の (C) 式を使うことで行われる。

$$dt_{\text{shell}} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} dt \tag{A.13}$$

質問 10 ニュートンの「絶対時間」の代わりにシュワルツシルトの遠方時間を使う効果。 比較のため、シュワルツシルト遠方時間とニュートンの絶対時間が同じであるとし、この時間と「球殻時間」にどんな差があるか調べよう。球殻時間としては、人工衛星の半径または地上のどちらかの時間を使う。(A.13) 式と近似式 (A.5) を使って、各々の場合について二つの速度の測定値における近似の関係をつくれ：

$$\frac{rd\phi}{dt} \approx \frac{rd\phi}{dt_{\text{shell}}}(1-q) \tag{A.14}$$

ここで q は小さい数である。q の代数的表現を求めよ。そして、地表に対する q の値と人工衛星の軌道半径における q の値を求めよ。これらの結果を使い、速度を変えることで質問 9 の結果の数値に生じる差を評価せよ。差は大きいか。

二つのノート

ノート 1. **ニュートン軌道半径は問題なし。** このプロジェクトの近似的な分析でも、人工衛星の円軌道半径 $r_{\rm satellite}$ はニュートン力学を使い正しく計算できると仮定している。円軌道のシュワルツシルト的な分析は第 4 章で行われる。その章を理解し読み終わったとき、ニュートン軌道半径がこのプロジェクトにおける我々の目的に対して十分正しいことを示すことができるようになっているだろう。

ノート 2. **緯度の効果はない。** 我々は地上の時計の速さ $v_{\rm Earth}$ が赤道にあるときの速さと等しいことを仮定した。北または南の緯度に行くと時間依存する補正項は別の値になると思うかもしれない。北極または南極に行けば地球の回転はないので地球の時計は運動せず、速度は 0 になる。地球は球形ではなく、少し赤道で膨らんでいるため、実際には緯度の効果はなくなる。両極で半径が小さくなればなるほど、速度の項が減るのとは逆に (A.12) 式の $M/r_{\rm Earth}$ の項は大きくなる。結果として、赤道での計算がすべての緯度で適用できる。

A.6 まとめ

アメリカ合衆国からメキシコへ列車に乗り、初めて旅をしている若い旅行者がいる。彼は窓の外のサカテカスの街を見て、ガイドブックの傍注を読み、ここが昔、銀山の町であったこと、カルフォルニア州のサンディエゴから 1848 キロメートル、ルイジアナ州のニューオリンズから 1506 キロメートルにあることを知って安心した。地表では、2 つの距離から位置は十分決められる。しかし空間の場合は 3 つ必要である。最も近い 3 つの GPS の人工衛星から光や電波パルスが届くまでの時間を求めることで、人工衛星までの距離を求める。非常に簡単だ。つまり、各信号経路の末端における時計の誤差を修正する（しなくてはならないし、実際にしているが）や否や簡単になるのだ。(1) 一般相対論では、人工衛星と地球の時計の相対高度と相対速度がその進みに影響を与えると予言する。(2) 地上の携帯受信機の時計は各人工衛星の原子時計よりもとてもではないが正確とはいえず、4 番目の人工衛星からの信号を使って地上の時計を合わせる。これらの補正により、GPS を使えば地球のどこにいてもたった数メートルの不定性だけで位置を知ることができる。

A.7 参照文献と謝辞

初めの引用は、セントルイスのワシントン大学の学術誌の編集によってオンラインで投稿された Clifford Will の “A Tale of Einstein, Congress and Safe Landings” からのものである。

Carroll O. Alley はこのプロジェクトで使った情報を多く提供してくれた。

Carroll O. Alley, "Proper Time Experiments in Gravitational Fields With Atomic Clock, Aircraft, and Laser Light Pulse," *Quantum Optics, Experimental Gravity, and Measurement Theory,* edited by Pierre Meystre and Marlan O. Scully 編集、 Plenum Publishing, New York, 1983, 421–424 ページ。

Neil Ashby, "Relativistic Effects in the Global Positioning System," in *Gravitation and Relativity at the Turn of the Millennium,* Proceedings of the GR-15 conference held at IUCAA, Pune, India, December 16–21, 1997, Naresh Didhich と Jayant Narlikar editors, Inter-University Centre for Astronomy and Astrophysics, Pune, India, 1998, 231–258 ページ

地上と塔の上の時計についての引用：Clifford M. Will, *Was Einstein Right? Putting General Relativity to the Test,* Second Edition, Basic Book/Perseus Group, New York, 1993, 49–50 ページ

第3章

落下中の世界

- ブラックホールに落ちても苦しくないか。
- 地平線に到達するとき、どのくらい速くなっているのか。誰に聞いたのか。
- ブラックホールにいったん落ちてしまうと、どのくらい長く生きられるか。
- 石が落ちたとき、ブラックホールの質量はどうなるか。

もしあなたが答えをあまり真剣に受け取らず、単に一種の冗談と考えてくれるのなら、私は（一般相対論を）次のように説明する。以前は、宇宙からすべての物質的なものが消え去ったとしても時間と空間は残るだろうと信じられていた。しかし相対性理論にしたがえば、時間と空間も物質といっしょに消えてしまうだろう。

— アインシュタイン

3.1 極値的加齢の原理

「まっすぐ進め」と時空は石に叫ぶ。石の腕時計は進んでいる道がまっすぐであることを確認する。

星やブラックホールの近くの曲がった時空幾何についてどんなに不思議な話をしても、運動の新しい事実は決してわからない。シュワルツシルト幾何学によって地上付近の野球のボールや石の運動について正しく記述することができる。驚くべきことに、シュワルツシルト幾何学を使って、地上付近の物体の軌道を分析すれば、星や白色矮星、中性子星、ブラックホールの周りの軌道を記述するための準備になる。

投げられた石は自由浮遊系でまっすぐな経路にしたがう。

石を投げ上げて落下させると、その石は空間中で放物線の経路（図 1 の左図実線）にしたがう。この経路の初めと終わりの事象で時間と空間を固定する。事象 1 を初期の発射とし、事象 2 を最終的な落下とする。石が図 1 の実線に示すような、事象 1 と事象 2 の間の特殊な経路を通るのはなぜだろうか。図 1 の上の破線のように、放物線よりも高い位置

に達して決められた落下の位置に急いで戻って来ることはないのか。また、放物線の下の破線をゆっくりと動くことがないのはなぜか。この2つの事象をつなぎさえすれば、全く違う軌跡でもよいのではないか。時空は石がどのように動くべきかを伝えるためにどんな命令を与えているのか。

時空は「まっすぐ進め」と叫ぶ。自由な石はそれにしたがう。「まっすぐ」とは何のことだ。何についてまっすぐなのか。我々は答えを知っている：石の経路は自由浮遊系でまっすぐである。図1の右図に示したように、石とともに鉛直方向に上がって落ちる自由浮遊系に乗る。石は発射（事象1）と落下（事象2）の間で、自由浮遊系に対して運動中まっすぐな経路を進む。

「まっすぐ」とはまっすぐな世界線のことである。

石の軌跡が慣性系でまっすぐでなければならないだけではなく、その系では一定の速さで動かなければならない。図2は石の位置（縦直軸）を時間の経過（横軸）で表したプロットである。時間の関数として石の位置が変化するとき、石の運動がたどる線を**世界線**と呼ぶ。一定速度はまっすぐな世界線になる。自然の出す石への命令は一般的な形で書けば「局所慣性系の中でまっすぐな世界線にしたがえ」だ。これほど簡単なものはない。

石は腕時計をもち運ぶ。

「まっすぐな世界線にしたがえ」は時空が動き方を教え、質量の運動を掌握するための命令である。石は腕時計を持っている。運動の間、石の腕時計は、発射点から落下点までの時を刻む。図2の事象1と事象2の間、腕時計は自由浮遊系の時空図中の粒子の世界線に沿って時を刻む（図2のまっすぐな世界線上のすべての点）。

自然な運動の腕時計時間は最大になる。

事象1から2を結ぶまっすぐな世界線は他の世界線とどこが違うのだろうか（図2の破線）。我々はこの質問の答えも知っている。極値的加齢の原理を使う。つまり、実際の世界線は、2つの事象を結ぶすべての世界線の中で腕時計時間が最も長いものである。自由な石は、引っ張られず、揺さぶられず、加速されることなく、事象から事象へと一様に進み、2つの事象の間の腕時計時間が最も長いことを記録する。それに対して、同じ事象1から出発し一心不乱に運動する旅行者は光の速さで月まで行って、義務づけられた到着時刻に事象2へすばやく戻って来る。一心不乱に進む旅行者の腕時計が記録する事象1と2の間の経過時間は、自由な石の腕時計時間よりも短い。双子のパラドックスの本質的な教訓は（第1章の1.4節）、二つの事象の間で自然な運動をすると腕時計時間が最も長くなるということだ。

基本的な原理を説明するのに、一心不乱な旅行者が月まで行く必要もあるまい。つまり、まっすぐな世界線からのどんなズレでも、それがどんなに小さくても、腕時計の経過時間は短くなる。人間の時間間隔の正確さを超えるようなものでも、石の腕時計はその差を検出でき、腕時計時間が最大の世界線をたどる。不思議なことだが、石は匂いをかぎわけ、腕時計なしで、最大の固有時の世界線にしたがう。でもどうやって？ 局所時空中をまっすぐに進みさえすればよい。

「加齢」は全経過腕時計時間を測定する。

我々は、粒子が世界線に沿って運動するとき、初めの事象から終わりの事象までの全経過腕時計時間を記述するために**加齢**という言葉を使った。時空を通じて石が選ぶ実際の世界線は加齢が最大のものである。時空の石への命令は「加齢が最大になる世界線にした

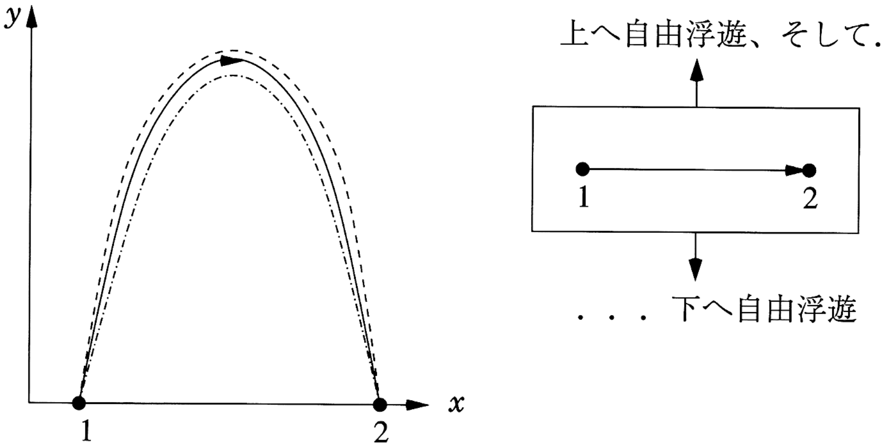


図 **3.1** 発射（事象 **1**）と落下（事象 **2**）をつなぐ石の放物軌道（左図の実線）。**2** 本の破線は、これらの **2** つの事象をつなぐ空間的軌道を表し、実際には石が通ることはない（なぜそうなのか）。右は、石とともに上昇したり下降する自由浮遊系である。この自由浮遊系に対して石はまっすぐな経路を通る。この運動を時間の関数としてプロットすると、まっすぐな世界線となる（図 **2**）。

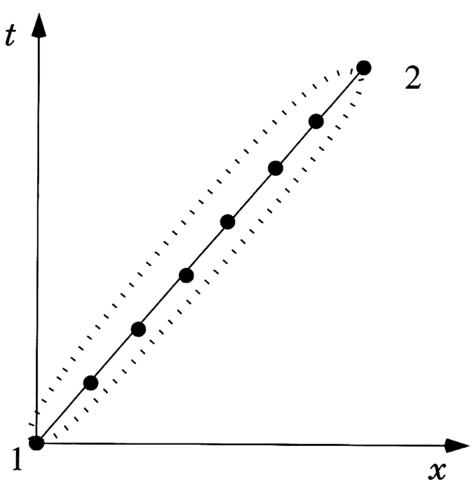


図 **3.2** 石とともに上下する自由浮遊系における石の世界線の時空図（図 **1** の右図）。途中の時計の刻みは世界線に沿った事象として描かれている。事象 **1** と **2** の間の曲がった破線は加齢の小さい世界線を表しているが、石は通らない（どうして通らないのか）。

もっとブラックホールについて

「ブラックホール」という言葉は1967年に（ホイーラー John Wheeler によって）採用されたのだが、概念は昔からあった。1783年という早い時期に、ミッチェル（John Michell）は、光は「他の物体と同じように引力を受け」なければならないと論じ、したがって引力中心が十分重く十分コンパクトならば「このような物体から放出される光はすべて戻される」ことになる。ラプラス（Pierre-Simon Laplace）は1795年明らかに独立に同じ結論に至った。その理由は「宇宙で最も大きな明るい天体はまさにこの理由で見えない可能性がある」からだ。

ミッチェルとラプラスは、遠隔作用としてのニュートンの重力理論を使って、すでに存在しているコンパクトな天体からの光の脱出や捕捉を分析した（46ページのボックス「ニュートンはブラックホールの地平線を予言しただろうか」）。ところでこのような静的なコンパクト天体は存在可能なのだろうか。1939年オッペンハイマー（J. Robert Oppenheimer）とスナイダー（Hartland Snyder）は、アインシュタインの重力理論の枠組内で重力崩壊について初めて詳しく扱い、発表した。彼らの論文はこの本で述べている、自転していないブラックホールについて中心となる特徴を予言した。

進行中の理論的な研究から、ブラックホールが自然な物理過程の結果であることが示されている。非対称崩壊系は必ずしもそれ自身の不安定性により粉々になるのではなく、なんと数秒間の内に大きな揺らぎを重力波として放出し安定な構造に落ち着くことができる。最終的な形として、ブラックホールは3つの特徴だけをもつ。それは質量と電荷、角運動量である。他の性質はブラックホールが形成するときに、それまであったピンや宮殿でも、なくなってしまう。これら3つの量を除いて細かい性質がないことから、（ホイーラーによると）「ブラックホールには毛がない」と言える。

帯電も自転もしないブラックホールはシュワルツシルト計量（(3.1)式の3次元空間への一般化）によって完全に表される。この計量はシュワルツシルト（Karl Schwarzschild）が一般相対論のアインシュタイン方程式から1915年に導いたものである。自転していないブラックホールのエネルギーは地平線の外側では利用することができない。そのため、自転していないブラックホールは「死んだブラックホール」と呼ばれる。

死んだブラックホールが自転してないのに対して、一般的なブラックホールは、一般的な星と同様に自転しており、速く自転していることもある。この自転に蓄えられているエネルギーを使って仕事をさせることができる。物質のジェットを操ることや、宇宙船を推進させることなどにである。その結果自転するブラックホールには価値があり「活きたブラックホール」という名が付けられている。

自転するブラックホールまたは自転するあらゆる質量の近傍の時空は引きずられる。この「引きずりの効果」は本当に観測できる。自転する我々の地球でさえも、現在開発中の技術によって可能になるだろう。ある技術では小さいジャイロスコープ（Gravity Probe B に搭載された、直径4センチメートルの水晶の球で、まもなく打ち上げられるだろう（訳注：2004年4月20日打ち上げられた。））を使う。別の技術として、大きな「ジャイロスコープ」（地球を軌道回転する人工衛星）を使う。ともに、ジャイロスコープの自転軸は1年に1秒角の割合で引きずられる。バックグランドに対してこの微小な歳差運動を測定することは難しい。この新しい一般相対論的効果を初めてまのあたりにすることは刺激的なできごとになるであろう。速く自転するブラックホールの近くでは引きずりの効果は大きく不可避でさえある。ロケットの推進力がいくら大きくても近くの宇宙船はひきずられる。

自然界でブラックホールはほぼ2つのグループに分けられる：太陽質量の数倍のもの。それに太陽質量の数百万倍のモンスターであり、ふつう銀河中心の近くにある。そこには質量が集中しており、ブラックホールが成長しやすい。

荷電していないが自転しているブラックホールの計量はカー（Roy Kerr）が1963年に導出した（プロジェクトF「自転するブラックホール」を見よ）。1965年ニューマン（Ezra Theodore Newman）とその他の人々は、荷電し自転するブラックホールの周りの時空についてアインシュタイン方程式を解いた。後の定理により、質量と電荷、角運動量の定まった定常状態にあるブラックホールの周りでは、カー-ニューマン幾何学がアイシュタインの場の方程式の唯一の解であることが証明された。

がえ」に言い替えられる。この本の残りのすべての運動の記述は、この簡単な命令からあふれ出てくる。これでおしまい。

自然な運動は極値的加齢を意味する。

いやいや、全然「おしまい」ではない。第 1 章の 1.4 節で述べたように、石は極大加齢ではなく、極小加齢の世界線にしたがうことも可能である。この両方の場合でも使える言葉が極値である。このような世界線に対する専門用語は測地線である。通常でない場合でも使えるように、これから極大ではなく極値 という言葉に換える。極値的加齢の原理によって、自由粒子は測地線、極値的加齢の世界線にしたがうという結果を要約している。このややこしく微妙な表現が完全のために使われた。それをしまい込むと、この本で我々が調べた世界線すべては極大加齢になる。

> **極値的加齢の原理**（繰り返し）：自由粒子が時空の 2 つの事象を通る経路は、これらの事象間の時間経過が極値をとるものである。

アインシュタイン：重力なんて存在しない。

図 1 と図 2 で 遅い運動と弱い重力相互作用に対して、ニュートン力学は時空中のまっすぐな世界線と空間中の曲がった経路の間の相違を正しく表している。そうならば、相対論の何が新しいのか？ 理論的な面でアインシュタインは言う。ニュートンの重力を捨て去り、その代わり測地線の考えが使えるのだと。自由浮遊系では、自由テスト粒子は局所的な時空でまっすぐな世界線に沿って動く。しかし、それは大域的なシュワルツシルト座標で記述すると空間の中で曲がった経路になっているかもしれない。

大域的なシュワルツシルト座標系を使って観測すると、局所的自由浮遊系中のまっすぐな世界線が空間の中で曲がることがあるとあなたは言っている。人工衛星の軌道は星の周りで曲がっていると予言した。しかし考え全体は明らかに間違っている。小さくまっすぐな運動を足し合わせても全体的に曲がった空間ができるわけがない。

まっすぐか、曲がっているか。それは座標系の選び方やグラフを描く表現法によって変わってくる。図 1 の左図では、地上で観測したとき、発射物体が空間で曲がった軌跡をたどっていることを表しており、右図では、同じ発射物体を自由浮遊系で観測するとき、空間でまっすぐな軌跡をたどっていることを表している。発射物体も自由浮遊系で一定速度で動き、これは図 2 の傾き一定の世界線によって目撃される事実である。このようにして記述される運動はできるかぎり直線に近い。これが測地線である。しかし、地上の観測者に対しては空間の経路は曲がっている。

月は局所時空でまっすぐ進む。

図 1 は時空の局所領域に閉じ込められた運動を表している。ここでは、地球に対して静止している系と石の飛行時間中に時空が実質的に平坦である系の間を往来することができる。それに対して、地球を回る月の軌道全体を自由浮遊系で張ることはできない。しかし、ここで月も局所的な自由浮遊系の時空でまっすぐ運動している。それは時空の測地線にしたがっている一方で、空間では軌跡が曲がっているからだ。

一般相対論は局所自由浮遊系の「四角いキルト」を縫い合わせる。

一般相対性理論は、局所的で小さい自由浮遊系の四角いキルトで時空の広い領域を覆えるように大きなキルトに縫い合わせる。アインシュタインは、地球や太陽に対してニュートンと基本的に同じ軌道を予言した。しかし、ここでアインシュタインは小さい食い違い

を直し、その一方でコンパクトな天体の周り（そして宇宙全体に対しても）で、天体の運動がニュートンとは違うことを予言した。この二つの理論が食い違う場合すべてに、実験は一般相対性理論の予言が正しいことを立証している（プロジェクト A, C, D, E を参照)。

3.2　反逆する石と従順なコンピュータ

初めと終わりの事象を結ぶあらゆる可能な世界線を試せ。自由な石は加齢を極値とする世界線を選ぶ。

石が反乱する。極値的加齢の世界線にしたがえという、時空によって発せられた命令に服従しない。またはもっと現実的に、実験者が石を握って、自由でない世界線に沿って無理に動かすとする。この抵抗は自然からの逸脱であり、部分的なものである。つまり、石は発射と衝突という儀礼的な事象には出席するけれども、標準的で自然な世界線の中間の事象では約束を守らない。ひょっとしたら、あるところではふつうよりもゆっくり動き、別のところでは速く動いているかもしれない。またあるいは、全く別の軌跡に外れてしまうことがあるかもしれない。それにもかかわらず、その腕時計は他の軌跡に沿って時間を刻み続ける。当然だが、石は落下の事象にたどり着く。石がはみ出たことによる罰は？軽い罰だ。地面と激突する事象で石の腕時計の時間の読みは、時空の命令にしたがったときよりも短くなるだろう（または、自然な世界線の加齢が極小になるのなら、もっと時間がかかるだろう)。この世界線からはみ出た石の加齢は、発射と落下の事象間のすべての可能な世界線の中で極値はとらないだろう。

現実の世界線を取り出せ：腕時計時間が極値となるもの。

既知の計量で表された時空中のどんな領域でも、また時空領域が曲がっていようと、平坦であろうと、自由に動くテスト粒子の世界線がどのように動くかを、服従しない石から予想する方法がある。そのやり方はとても簡単だとはいえない：「反乱するたくさんの石のように振舞え」。反乱する石は初めの事象から終わりの事象までそれぞれいろんな世界線にしたがって運動する。候補となる世界線上で近接した事象の組について腕時計時間の増加の和として各世界線について加齢を計算せよ。これらの候補のすべての中で、極値的加齢をとる世界線を選べ。極値的加齢をとる世界線は実際の石のもので、石は固定された初期事象と終事象の間を自由に運動する。

あなたの理論は根本的でしかも興味深いが、何の役にも立たない。世界線上の「固定された」終わりの事象、つまり落下の場所と時間を、計算する前から知る必要があるのなら、どうやって石の運動を予測するというのか。むしろ、その最終位置は、運動方程式によって知るべきものである。発射点とその初期速度が与えられたとき、落下点はどこになるのかが知りたいのである。ふつうはその点にいつ到達するのかということすら気にかけない。このような解析に対してあなたの方法は役立たない。

いや、役に立たないことなんてない。クレー射撃（またはスキート射撃）を考えよう。クレー射撃とはバネによって発射される陶器の的を鹿弾の散弾で撃つスポーツである。前もって的の軌跡を知っているか、または予想ができている。的を撃つためには弾が的に命中する

位置と時刻をともに考慮する必要がある。的が空間のある点に達した時に、散弾が詰まった束は的の軌跡を横切らなければならない。要するに、最終的な命中の事象の位置と時間を決めなければならないのだ。初期の出発の事象はこの場合、弾を発射することである。発射と命中の時空事象を選び、この 2 つの事象を結ぶいろんな世界線を試し、極値をとる世界線を選び、(設定した砲口速度に対して) 命中させるための方向を決めるコンピュータプログラムを考えよう。この過程は初期条件から始まり、後の運動を予測予するというふつうの分析と同じ結果になる。でも、あなたの言うようなやり方もできる。以下の 2 つの節では、極値的加齢の原理を使って曲がったシュワルツシルト幾何でのエネルギーの式を導出する。これらの結果は従来の解析 (「初期の位置と速度のデータからその後の予言をすること」) を行う上で役に立つ。

3.3 曲がったシュワルツシルト幾何におけるエネルギー

極値的加齢により運動の定数としてエネルギーを求める。

この節では、ブラックホールの中心に向けて落下する粒子のエネルギーを新らたに表し直す。極値的加齢の原理をシュワルツシルト計量とともに使い、物体が運動する間に一定であり続ける量を探す。第 1 章の 5 節で平坦時空でのエネルギーを導いた。ここではその解析を拡張し、落ち込んで行く粒子と同様、軌道を描く粒子のエネルギーも導びく。第 4 章では極値的加齢の原理によって第二の運動の定数である角運動量が導かれる。これら二つの運動の定数を使うと、彗星の運動から太陽による光の湾曲、水星の楕円軌道の歳差運動、人工衛星がブラックホールに落ち込む寸前の長いぐらつきまでを予測するのに役立つ。

ここで、シュワルツシルト計量の時間的形式 (43 ページ) は

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \dfrac{2M}{r}} - r^2 d\phi^2 \tag{3.1}$$

である。図 3 に示したような引力中心に向いた ($d\phi = 0$) 石の落下について考えよう。この石は次々とすみやかにフラッシュを 3 回放つ。これら 3 つの事象によって、軌跡を近接する 2 区間に分ける。図の中でこれらの区間 A, B は同じ長さである必要はない。

以下の分析でこれらの事象の間隔について腕時計時間と遠方時間を調べる。時間間隔が小さいという了解のもとで、簡単のため、微分の表記 $d\tau$ と dt を τ と t で置き換える。t を含むシュワルツシルト計量の部分だけに興味を移すことになるだろう。(3.1) 式を簡略化すると

$$\tau^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) t^2 + (t\ \text{を含まない項}) \tag{3.2}$$

となる。3 つの事象の空間の位置を固定し、初めと終わりの事象の遠方時間を固定する。最初と最後の時刻をそれぞれ $0, T$ とする。石はその中間の点を通って、フラッシュを放

極値的加齢の原理は落下中にフラッシュの時間を測るのに役立つ。

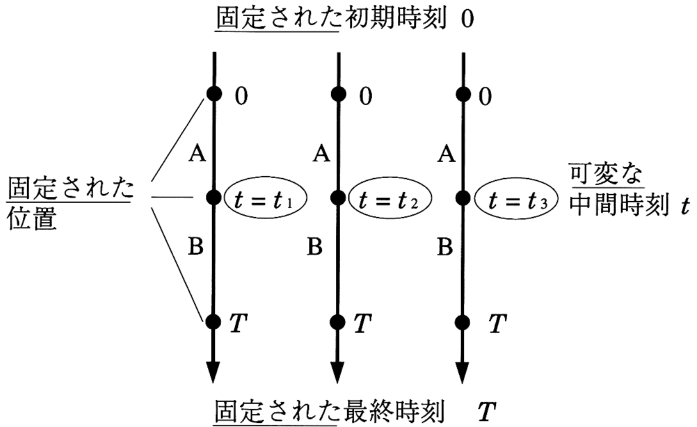


図 **3.3** 石が腕時計を着けて引力中心に向かって落下するとき、途中の **3** つの時刻 t_1, t_2, t_3 の事象。石は **3** 度発光する。そのすべては決まった位置で発光し、**1** 度目と **3** 度目の発光時間は固定されている。それでは質問しよう。石が **2** 度目の点を通り過ぎるのはいつだろうか。初めと終わりまでの事象間の腕時計時間が極値をとるようにすることでこの質問に答えよ。この要請から、時間の定数としてのエネルギーが得られる。

つ時刻 t をどうやったら見つけられるのだろうか？ 答え：初めの時刻から終わりの時刻までの全腕時計時間が極値をとるように中間の時刻を選び、極値的加齢の原理を使って石のエネルギーの式を導出する。エネルギーは石が落ちても一定のままになる。

区間 A の経過時刻は t である。この区間に対する腕時計時間の式を書き留めよ。r_A を区間 A にわたる半径の平均値とする。中間の時刻 t について微分をとり、時間を含まない計量の項を無視する。最初の区間に対する腕時計時間 τ_A は

$$\tau_A = \left[\left(1 - \frac{2M}{r_A}\right)t^2 + (t \text{ を含まない項})\right]^{1/2} \tag{3.3}$$

となる。極値的加齢を調べるために微分をするための準備が必要であり、τ_A を t で微分する：

$$\frac{d\tau_A}{dt} = \frac{\left(1 - \dfrac{2M}{r_A}\right)t}{\left[\left(1 - \dfrac{2M}{r_A}\right)t^2 + (t \text{ を含まない項})\right]^{1/2}} = \left(1 - \frac{2M}{r_A}\right)\frac{t}{\tau_A} \tag{3.4}$$

区間 B の経過時刻は $T-t$ である。r_B を区間 B にわたる半径の平均値とする。この区間に対する腕時計時間 τ_B は

$$\tau_B = \left[\left(1-\frac{2M}{r_B}\right)(T-t)^2 + (t \text{ を含まない項})\right]^{1/2} \tag{3.5}$$

となる。極値的加齢を得るために、中間の時刻 t について再び τ_B の微分をとると

$$\frac{d\tau_B}{dt} = \frac{-\left(1-\dfrac{2M}{r_B}\right)(T-t)}{\left[\left(1-\dfrac{2M}{r_B}\right)(T-t)^2 + (t \text{ を含まない項})\right]^{1/2}} = -\left(1-\frac{2M}{r_B}\right)\frac{(T-t)}{\tau_B} \tag{3.6}$$

となる。それでは 2 つの腕時計時間を加えて、最初と最後の事象の間の全腕時計時間を求めよう：

$$\tau = \tau_A + \tau_B \tag{3.7}$$

極値的加齢の原理は自然な運動の全腕時計時間 τ が極値をとることを意味している。この極値を見つけるために、t について (3.7) 式の微分をとり、(3.4) 式と (3.6) 式を代入し、0 とすると

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{d\tau_A}{dt} + \frac{d\tau_B}{dt} = \left(1-\frac{2M}{r_A}\right)\frac{t}{\tau_A} - \left(1-\frac{2M}{r_B}\right)\frac{(T-t)}{\tau_B} = 0 \tag{3.8}$$

となる。(3.8) 式の最後の等式から

$$\left(1-\frac{2M}{r_A}\right)\frac{t}{\tau_A} = \left(1-\frac{2M}{r_B}\right)\frac{(T-t)}{\tau_B} \tag{3.9}$$

が得られる。$t = t_A$ と $T - t = t_B$ とすると (3.9) 式は

$$\left(1-\frac{2M}{r_A}\right)\frac{t_A}{\tau_A} = \left(1-\frac{2M}{r_B}\right)\frac{t_B}{\tau_B} \tag{3.10}$$

となる。(3.10) 式の左辺は第 1 区間 A だけの量であり、右辺は第 2 区間 B だけの量である。この方程式から、ある区間から別の区間に移るときに一定になる量が存在していることがわかる。言葉で表すと

$$\left(\begin{array}{c}\text{第 1 区間に沿っ}\\ \text{た } (1-2M/r)\\ \text{の有効値}\end{array}\right)\frac{\left(\begin{array}{c}\text{第 1 区間に沿った}\\ \text{遠方時間の進み}\end{array}\right)}{\left(\begin{array}{c}\text{第 1 区間に沿った}\\ \text{腕時計時間の進み}\end{array}\right)} = \left(\begin{array}{c}\text{第 2 区間に沿っ}\\ \text{た } (1-2M/r)\\ \text{の有効値}\end{array}\right)\frac{\left(\begin{array}{c}\text{第 2 区間に沿った}\\ \text{遠方時間の進み}\end{array}\right)}{\left(\begin{array}{c}\text{第 2 区間に沿った}\\ \text{腕時計時間の進み}\end{array}\right)} \tag{3.11}$$

となる。この式の両辺のどちらの値も我々が選んだ区間とは独立である。これですべての区間についても運動の定数となる量を見つけた。この運動の定数をエネルギーと同定するために微分の記法に戻ろう。このエネルギーは落下する粒子の経路のどんな区間に対しても同じ形をとらなければならない：

シュワルツシルト幾何学でのエネルギー

$$\frac{E}{m} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} \tag{3.12}$$

これをエネルギーと同一視するためには、大きな r に対して（引力中心からずっと離れた場所で、時空は平坦になっているはずである）、その式が特殊相対論のエネルギー $E/m = dt/d\tau$ になっていなければならない（11 ページの (1.25) 式）。

エネルギーはブラックホールから離れると特殊相対論の形になる。

E だけはなく、無次元量である E/m もよくみかける。なぜか？ これには 2 つの理由がある：(1) 質量の違う粒子が同じ世界線上を動くことを知っている。運動を説明するのは、落下する粒子の質量単独でもないし、エネルギー単独でもなく、その二つの比、質量当たりのエネルギーである。(2) 比 E/m には単位がない。このことから、E と m を同じ単位で表すことに躊躇はいらない。E/m の分子と分母はキログラムまたは陽子の質量、100 メガ電子ボルトなど、どれでも表せる。

同じエネルギーの表現が石の半径方向でない運動についても正しい。

図 3 は石が中心に向かって落下することを表している。しかし、この導出を振り返れば、半径方向でない運動つまり角度 ϕ が変わる運動の区間に対しても同じように正しい。したがって、(3.12) 式は、球対称で回転しない重力中心の周りを動く石のエネルギーに対する一般的な式になる。

3.4 無限遠で測ったエネルギー

全エネルギーを測る新しい方法。

一般相対論のエネルギーは分割できない。

ニュートン (Isaac Newton 1642–1727) は軌道運動の法則を発展させ、オイラー (Leonhard Euler 1707–1783) はエネルギーの考えとエネルギー保存を完成させた。ブラックホールを回ったり落下する人工衛星のエネルギーを表すにあたって、重力についてのニュートンの説明と重力エネルギーについてのオイラーの説明を学んだ人は誰でもここでつまずくだろう。彼らの非相対論的視点ではエネルギーを 2 つの形に分離できた。1 つは「運動」エネルギーであり、速さに依存し、引力中心からの距離とは無関係である。もう一つは「位置」エネルギーで、引力中心からの距離に依存し、速さに無関係である。曲がった空間における運動をアインシュタインの視点で説明しようとするとこのような区別はできない。この新しいエネルギー観から新しい統一的視点が得られる。速さに関係したエネルギーと位置に関係したエネルギー、質量に関係したエネルギーは、分離不可能な状態に混ぜられ、より大きく単純な統一体となる。

「無限遠の観測者によって測定されるエネルギー」

軌道運動する人工衛星の「統一エネルギー」を どうやって観測して数値にするのか？ 原理的には離れたテスト粒子に作用する重力効果を通じて測ることができる。星 + 人工

人工衛星のエネルギー E の測定

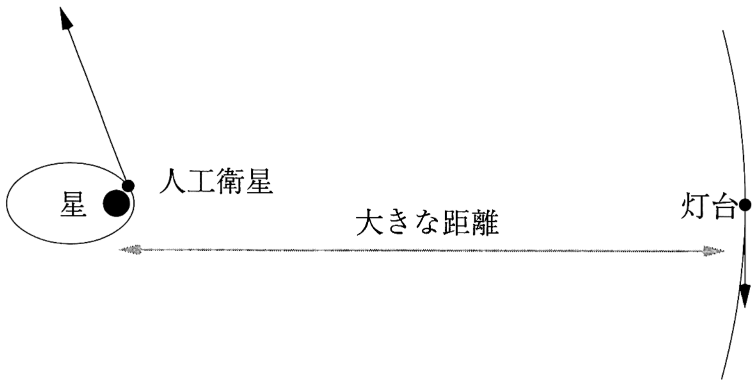


図 3.4 星の周りを回っている小さな人工衛星のエネルギー E の無限遠での測定。星と人工衛星の系から遠く離して灯台が円軌道するようにおく。灯台の軌道上の加速度からニュートン力学を使って星と人工衛星の系の質量 $M_{\mathbf{total}}$ を求める。これから星の質量 $M_{\mathbf{star}}$ を引くことにより、人工衛星だけの「無限遠でのエネルギー E」が得られる。この統一された唯一のエネルギーがニュートン力学の位置エネルギー＋特殊相対論の運動エネルギーと静止エネルギーの多重エネルギーに置き換えられる。

小さい人工衛星の全粒子エネルギーの本質を把握する方法の中で、以下のものよりも説得力のあるものはない：ニュートン力学を使って引力中心と人工衛星の「重さ」を測れ。引力中心からずっと外に、小さい人工衛星を置き、その人工衛星の軌道のずっと外に星-人工衛星系を回る円軌道上に灯台を置く。それらはずっと遠くにあるためニュートン力学が使えるものとする（図 4）。

灯台が円軌道の周りを 1 周する時間を測り、この灯台の軌道の円周を測る。円周と時間から軌道上の灯台の速さを計算する。円周から r 座標を計算し、速さと半径から、円軌道のための内向きの加速度 v^2/r を計算する。この加速度に粒子の加速度をかけたものは、引力中心と人工衛星によって生じる重力と等しくならなければならない（ニュートンの視点による）。通常の単位で書くと

$$\begin{pmatrix} \text{灯台に} \\ \text{はたらく力} \end{pmatrix} = m_{\text{beacon}} \begin{pmatrix} \text{灯台の内向き} \\ \text{の加速度} \end{pmatrix}$$

$$\frac{GM_{\text{total}}m_{\text{beacon}}}{r^2} = m_{\text{beacon}}\frac{v^2}{r} \qquad (3.13)$$

2 つ目の式を共通の係数 m_{beacon} で割り、（すべての量を通常の単位で）未知の量について解くと

$$M_{\text{total}} = \begin{pmatrix} \text{人工衛星＋星} \\ \text{の系の質量} \end{pmatrix} = \frac{v^2 r}{G} \qquad (3.14)$$

が得られる。全質量から星の質量 M_{star} を引く。星の質量は、系に人工衛星が加わる前に同じ方法で測定しておく。この差が遠方観測者（灯台）が気づくことのできる、人工衛星のエネルギーになる。幾何学単位で

$$E = M_{\text{total}} - M_{\text{star}} \qquad (3.15)$$

である。人工衛星のエネルギーを運動の定数だと言うことは、無限遠で測定した人工衛星のエネルギーである E が 人工衛星の自由な飛行の間いつも同じ値であり続けると言うことに等しい。

例題 1 球殻に取り付けられた時計のエネルギー

質量 m の球殻時計が r 座標で r_0 の位置に取り付けられている。遠く離れた灯台の軌道を使って測定する時計のエネルギー E はいくらになるか。

解答

時計のエネルギーは $dt/d\tau$ から計算される (3.12)：

$$\frac{E}{m} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\tau} \tag{3.12}$$

この球殻時計がカチッ、カチッと刻む間隔を 2 つの事象に選ぶ。すると、これらの時計の刻みの間の固有時は時計の読みである。つまり、$d\tau = dt_{\rm shell}$ である。この本の巻末公式一覧の公式集の (C) 式から球殻上で静止する時計の $dt_{\rm shell}$ と遠方時計の dt の間の関係は

$$dt = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2} dt_{\rm shell} \tag{3.17}$$

である。この式と (3.12) 式、$d\tau = dt_{\rm shell}$ から、球殻時計のような物体に対して

$$\frac{E}{m} = \left(1 - \frac{2M}{r_0}\right)^{1/2} \qquad \boxed{r_0 \text{ で静止}} \tag{3.18}$$

が得られる。この式に平方根があることに気を付けよう。この式は地平線の外にあるどんな換算円周 r_0 の球殻上で静止している物体に対しても正しい。大きな r_0 で静止している粒子の極限的な場合では、特殊相対論で要請されるように、静止エネルギーが質量 m と等しくなる。時計がブラックホールの近くの半径 r_0 に留まっているとき、比 E/m は 1 よりも小さく、エネルギーは時計の質量よりも小さい（負の「重力の束縛エネルギー」の証拠である)。この全エネルギーは地平線 $r_0 \to 2M$ で 0 になる。時計を留めていたボルトが緩んで、時計が落下するとしよう。落下中 E は同じ値で、時計が地平線を横切る時も、時計がブラックホールの中心で潰れるときも同じである。落下の間、97 ページのボックスで述べた方法を使うと、系の質量、ブラックホール＋時計の質量が変わらないことがわかる。

衛星系の静止エネルギーつまり全質量 $M_{\rm total}$ は遠く離れた円軌道上の灯台を使って測定されるため、97 ページのボックスに示したように、ニュートンの引力が質量の測定の正確な手段となる。この全エネルギーから星の静止エネルギー $M_{\rm star}$ を引き去り、この差が（星の質量と比べ小さい限り）「無限遠の観測者によって測定される人工衛星のエネルギー」となる：

$$E = M_{\rm total} - M_{\rm star} \tag{3.19}$$

このエネルギーの値は何だ？ 粒子が軌道上にあるときや落下しているときでも一定でなければならないのか？ (3.12) 式はそのような定数になっている。(3.12) 式から、球対称で自転していない重力質量の近くで軌道回転する粒子や落下する粒子のエネルギーと質量の比の一般的な式が得られる。

(3.19) 式の導出では、落下する粒子が軌跡のどこから始まるかについて何も言っていない。特に、(3.12) 式が無限遠で $E/m = 1$ から始まるのに対して、粒子が引力中心から無限に離れたところにたどり着くのに十分なエネルギー持っていないときでさえも、この式はエネルギーが一定であることを述べているのである。一例として、局所球殻に固く取り付けられた時計がある（98 ページの例題 1)。(3.15) 式や (3.19) 式にしたがうと、時計が

ボルトで系につけられたとき、系の質量はこの時計の分だけ増える：$M_{\text{total}} = M_{\text{Sun}} + E$.

さて、据え付けられたボルトが緩んで、時計がブラックホールに落ちる。系の全エネルギーは変わらないため、遠方の灯台にはその差がわからない。落下した後、ブラックホールが残るだけである。ブラックホールの質量が単純に E だけ増えるのである。

3.5　無限遠で静止状態からの落下

ゆっくり内側に漂って行き、そして中心に向かって急落下する。

特別な場合：石は $r=\infty$ で静止状態から出発する。

自由粒子に対して E/m が一定であるという事実があるため、突入する粒子の運動はかなり簡略して記述することができる。例として、球対称で自転しないブラックホールから非常に遠く離れたところで静止している石を考えよう。永劫の時間をかけて徐々にこの石は引力中心に落ち、忘却の彼方へ消えて行く。形式的だが、石がブラックホールから無限に離れた距離、無限の過去、静止状態から落ち始めると言うことができる。この突入のニュートン的な分析は 46 ページのボックスにある。

石のエネルギーは突入の間、一定である。

E/m 一定の法則にしたがって、石のエネルギーは落下の間、ブラックホールから離れているか近いかに関係なく一定である。しかし、ブラックホールから離れて止まっているときの石のエネルギーはその質量である（$E/m=1$）。したがって、(3.12) 式から内側に落下するあらゆる半径 r に対して

$$\frac{E}{m} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\tau} = 1 \qquad \boxed{r=\infty \text{ で静止状態から}} \qquad (3.20)$$

が成り立つ。

落下する粒子のエネルギーはすべて $E/m=1$ なのか。

とんでもない。この値はブラックホールから遠く離れた距離から速度 0 で出発する質量 m の物体（石や鍵、コーヒーカップ）にだけ適用できる。全然当てはまらない場合として、遠くの距離ですでに動いている場合や、遠くの距離でブラックホールに向けて落下している場合がある。この速度を v_{far} とする。遠く離れた領域では特殊相対論が使え、平坦な時空のエネルギー $E/m = 1/(1-v_{\text{far}}^2)^{1/2}$ を持っている。その後、落下している間、粒子はブラックホール近くでシュワルツシルト幾何に入っても同じエネルギーを持ち続ける。112 ページの例題 3 でこの場合を調べる。
3 番目の例として、質量 m が半径 r_0 のところで静止した状態から、そっと放された場合である。98 ページの例題 1 から、単位質量当たりエネルギーの値は (3.18) 式から $E/m = (1-2M/r_0)^{1/2}$ であることがわかる。この値は無限遠で静止状態から落下する粒子のエネルギーよりも小さい。この場合も石が r の小さい位置に落下して行くときに E/m の値をとり続ける。

(3.20) 式とシュワルツシルト計量 (3.1) から dr/dt がどんな形をしているか知ることができる。これは、非常に遠いところから静止状態で出発した石の遠方時間の変化と r 座

標の変化の比である。この微分を求めるためには、(3.20) 式を 2 乗し、$d\tau^2$ をかけ、これと、半径方向の落下（$d\phi = 0$）のシュワルツシルト計量 (3.1) の $d\tau^2$ が等しいとせよ：

$$\left(1-\frac{2M}{r}\right)^2 dt^2 = d\tau^2 = \left(1-\frac{2M}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1-\dfrac{2M}{r}\right)} \tag{3.21}$$

半径速度の記録係測定値

これを dt^2 で割り、$(dr/dt)^2$ について解き、平方根をとると

$$\frac{dr}{dt} = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2} \qquad \boxed{r=\infty \text{ で静止状態から}} \tag{3.22}$$

が得られる。平方根をとるところでマイナスの符号を選んだのは、地平線の外からブラックホールに落下すると半径が減少するためである。(3.22) 式から、遠方時計で測定する時間 t に対する換算円周 r の変化率である記録係速度がわかる。


この分析はなぜこんなにも複雑なのか。中心に自由に落下するとき、石はこれらの計算をどうやっているのか。石には頭脳がなく、(3.22) 式にしたがうために、ここでしたものよりも速く計算しなければならないはずだ。時空または何か別のものがこんな複雑な命令を下し、石が本当にそれにしたがっていると、本気で信じているのか。


石は「(3.22) 式にしたがって」おらず、シュワルツシルト計量や球殻時間、換算円周 r なんか気にもかけていない。石に頭脳があるはずがない。ただ、もっとも単純な命令「まっすぐ進め」にしたがっているだけなんだ。正式な命令書ではこの命令を文の長さを犠牲にして正確に書き直して、「局所自由浮遊系のまっすぐな世界線にしたがえ」となっている。この命令が石の聞くすべてであり、それにしたがうことが石のすべきすべてである。
だが、我々は石に与えられる局所的な指示では満足できない。もっと大域的な疑問の答えを知りたい：「石のしたがう経路全体はどうなっているのか」「経路上のいろんな点での速度はどうなっているのか」局所的自由浮遊系ではこれらの疑問に十分に答えられない。なぜなら時空曲率があるために、一つの慣性系の時空領域の大きさに制限がつき、場所場所で運動に差が生じる。大域的な疑問に答えるためには大域的な座標系が必要である。それで、球殻やシュワルツシルト計量と複雑な式 (3.22) が必要になる。もっと複雑な疑問を抱けば、答えはもっと複雑になる。これは誰のせいだ。石のせい？ 自然のせい？ いや、我々のせいだ。もし我々が局所的な指示に満足すれば、平穏であり石にこだわらないでいられる。

記録係の予言：石は地平線に近づくにつれて遅くなる。

無限遠の半径から静止状態で自由落下を表す (3.22) 式から驚くべき帰結がもたらされる。粒子が地平線に近づくにつれて（$r \to 2M$）、曲率因子（$1-2M/r$）は 0 になり、記録係の速度も 0 になる。シュワルツシルト記録係は、換算円周 r の軌跡を遠方時間 t の関数として記録するのだが、事象の地平線に近づくにつれて、自由落下する粒子がゆっくり落下することを計算から知ることができる。事象の地平線 $r = 2M$ に近づけば近づく程、速度 dr/dt は 0 に近づく。この座標系で追跡すると、粒子自身が事象の地平線に近づくまでに、無限の遠方時間 t がかかってしまう。

そんなことは不可能だ。粒子は、ニュートン的な言語で、強烈な重力として表されるものに引き寄せられる。この力が粒子を遅くすると信じろって言われても無理だ。$r = 2M$ にある事象の地平線のすぐ外の球殻にしがみついている何者かが観測すると、粒子が遅くなり、ゆっくりと無限の時間をかけて地平線で静止するとでも言うのか。アイディア全体がばかげている。

事象の地平線で速さ 0 になることを誰が局所的に観測しているかを疑問に感じれば、このバカバカしいことが信じられるようになる。答えを言えば誰も観測していないのだ。球殻観測者でなければ自由浮遊観測者でもない。ブラックホールの近くでは誰も (3.22) 式の速さを直接観測しない。

r 座標は、球殻の大円の円周を 2π で割ることで得られ、そして遠方時間 t はブラックホールからずっと離れたシュワルツシルト記録係によって記録されることを思い出そう。記録係は r 座標で変化 dr を追跡し、それに対応する遠方時間の変化 dt で割る。粒子が $r = 2M$ の事象の地平線に近づくにつれて、その比 dr/dt は 0 に近づく。

誰それが測定しノートに書き込んだものなんてどうでもいい。興味があるのは現実だ。単刀直入に教えてくれ。落下する石は地平線で本当に止まるのか止まらないのか。

すでに特殊相対論で、実験結果の予測に注意を十分傾けることを学んだ。例えば「2 つの事象間の時間」や「粒子の速度」は不変量ではなく、他の慣性系で測定すると違う値になるだろう。こういった意味で、「2 つの事象間の本当の時間」や「粒子の本当の速度」は一意的な意味を持たない。同じように、ここでの一般相対論の議論では、「地平線での速度」はある座標系の記録について言えることでなければならない。「本当の速度」にも一意的な意味がない。遠方の記録係にしたがえば、落下物体は地平線で静止する。次に球殻観測者に対して落下物体が地平線を光速で横切ることを我々は知る。何と対照的なことだろうか。

球殻上に立っている球殻観測者は、自由落下する粒子の速度が (3.22) 式から得られているものとは全く異なっていると観測する。しかし、その測定値はその方程式から容易に得られる。球殻観測者が観測するものは dr ではない。半径方向に離れた球殻に取り付けられている時計の間に巻尺を垂らす。したがって、球殻の位置の間の固有距離 $d\sigma = dr_{\text{shell}}$ を直接測る。巻末公式一覧にある公式集の (D) 式から 2 つの半径距離 dr と $d\sigma$ には

$$d\sigma = dr_{\text{shell}} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2} dr \tag{3.23}$$

の関係がある。さらに、球殻観測者の時計は遠方時間 dt で時を刻むのではなく、球殻時間 dt_{shell} で刻む。この腕時計時間 $d\tau$ は 2 つの事象が同じ場所で起きる座標系で記録される時間として定義される。球殻系では球殻時計は、針が進む間に空間座標は変わらない。球殻時間 dt_{shell} の間と遠方時間 dt の関係は巻末公式一覧にある公式集の (C) 式で与えられる：

$$dt_{\text{shell}} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} dt \tag{3.24}$$

球殻観測者は、自由落下の石が別の速さであることを測定する。

上の 2 つの式と (3.22) 式から、自由落下観測者の半径方向の速度は球殻観測者が測ると

$$\frac{dr_{\text{shell}}}{dt_{\text{shell}}} = -\left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2} \qquad \boxed{r=\infty\ \text{で静止状態から}} \qquad (3.25)$$

となる。この半径方向の速度はニュートンの結果と同じである（46 ページのボックス）。しかしながら、このニュートンの表現では球殻座標と記録係座標を区別できない。(3.25) 式をみれば、この式が球殻座標と球殻測定量の式であることははっきりしている（各球殻はそれぞれ半径の値が付けられているので、この式の右辺で換算円周 r を残しておいても大丈夫だろう。この r の値を示したラベルを見ることで、どんな観測者でも自分の球殻がどこにあるかを知ることができる）。

球殻観測者は石が地平線で光速になることを記録する。

球殻観測者が測ると、無限遠で静止状態から落下する粒子の速度は、換算円周 $r = 8M$ またはシュワルツシルト半径（$2M$）の 4 倍で光速の半分になる。粒子が事象の地平線 $r = 2M$ を通過すると、近くの球殻観測者は光速で動いていると記録する。[球殻と球殻観測者は地平線の中で存在できないし（以降の節を見よ）、地平線上でも無理だ。そこでは球殻は無限の圧力を感じる。地平線における (3.25) 式の予言は外挿としての極限であると受け取らなければならない]

地平線での石の「球殻速さ」と「記録係速さ」の間の根本的な差

近くで測った速さと記録係の速さは いかに大きく違うことか（図 5 を見よ）。ある観測者が測定すると（(3.25) 式）、そこで落下する石は光の速さで運動し、別の観測者が計算すると（(3.22) 式）0 になる。これほど劇的に、特殊相対論で記述される平坦時空で起きる現象からいかに離れているかを実証するものはない。

時間変換の式 (3.24) を使って、どうやって一つの球殻から換算円周の異なった別の球殻へ突入する石を記述したらよいのだ。石が通り過ぎるときに球殻で爆竹を鳴らさせよう。別々の球殻上の時計はまさに (3.24) 式にしたがい、それぞれ「別々に進む」。これらの時計の読みの値から、石が進むときに放たれる 2 つのフラッシュ光の間の球殻時間をどうやって測るのか。

かつて物理学者が使う「微分のいい加減な使い方」に出くわした。シュワルツシルト計量を書くとき、2 つの事象に 1 つの値 r を使ってもよいほど時空の中で十分近くなければならないことを念頭に入れておくために、微分 dr, dt などを使っている。多くの場合、この基準は時間と空間で何メートルも離れている事象に出くわすことがある。速度を測定するとき、dr や dt, dr_{shell}, dt_{shell} をすべてゼロにする極限の意味で微積分を使う。だから、爆竹がすぐに次々と爆発し、2 つの時計は極限的な意味で同じ球殻上にあり、この極限で同じ割合で進む。

まとめると、無限遠で静止状態から出発して半径方向に突っ込んでいる物体に対して、エネルギー不変の原理から、球殻観測者によって測定される落下速度は r が小さくなると常に増加し、地平線で光速に達する。それに対して、シュワルツシルト記録係の報告書から計算すると、物体の落下速度は地平線で 0 になる。

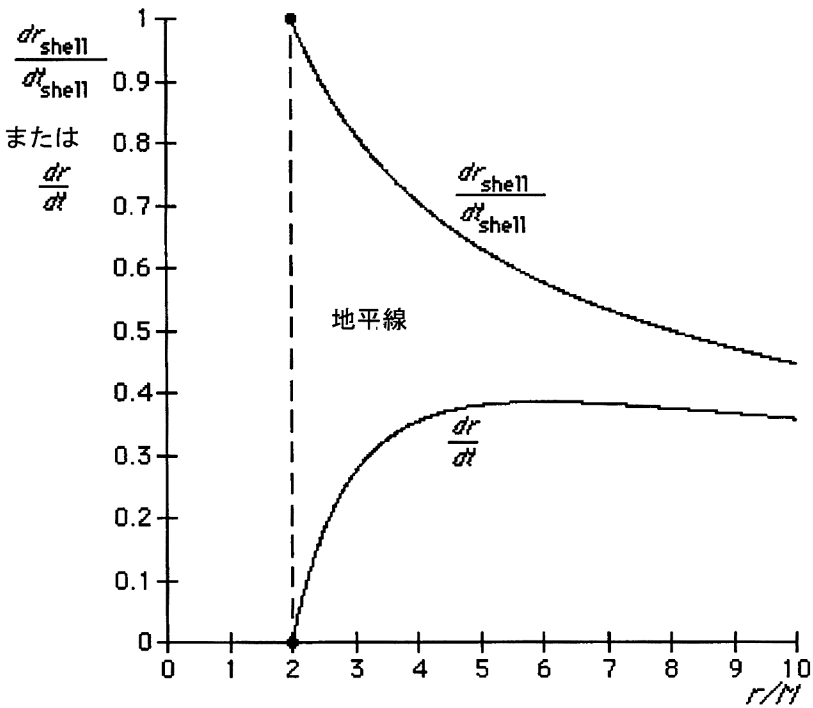


図 **3.5** 落下する石の **2** つの速度（下をグラフの正にとってある）のコンピュータによるプロット。無限遠から静止状態で落下する石の速度は、球殻上の観測者が石を通り過ぎるときに測定すると、$dr_{\mathrm{shell}}/dt_{\mathrm{shell}}$ となり、シュワルツシルト記録係が測定すると dr/dt になる。地平線で球殻速度は光速に向かって速くなり（**(3.25)** 式)、記録係速度は **0** へと遅くなる（**(3.22)** 式)。

3.6 球殻観測者が測るエネルギー

球殻観測者は運動を局所的に分析するために特殊相対論を使う。

石が落ち始める所が遠ければ遠い程、列をなして待ち受ける局所球殻観測者が観測する石の速さはどんどん大きくなっていく（(3.25) 式)。球殻観測者は大きなエネルギーをもつ速い石を見る。そして通り過ぎる石が速ければ速い程、原理的に観測者は石を減速させ静止させることで多くのエネルギーを取り出すことができる。この意味で、小さい半径の球殻観測者は目の前を速く通りすぎる石には大きなエネルギーがあると考えられる。半径が小さいほど増加する球殻エネルギーは運動の定数としてのエネルギー (3.20) の概念と

どうやって折り合いをつけたらよいのだろうか。この質問に対して答えるために、(3.25) 式から出発しよう：

$$v_{\text{shell}} = \frac{dr_{\text{shell}}}{dt_{\text{shell}}} = -\left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2} \quad \boxed{r = \infty \text{ で静止状態から}} \quad (3.26)$$

「球殻エネルギー」は特殊相対論を使って計算する。

球殻観測者は特殊相対論の結果を使って、落下する石のエネルギーを計算する。11 ページの (1.24) 式を (3.26) 式に適用すると

$$\frac{E_{\text{shell}}}{m} = \frac{1}{(1 - v_{\text{shell}}^2)^{1/2}} = \frac{1}{\left(1 - \dfrac{2M}{r}\right)^{1/2}} \quad \boxed{r = \infty \text{ で静止状態から}} \quad (3.27)$$

球殻エネルギーは局所的な量。

が得られる。単位質量当たりの球殻エネルギーは局所的な量であり、通過する石の速さから球殻観測者が測定する局所的な量である。球殻観測者は「無限遠で測定されるエネルギー」や「運動の定数としてのエネルギー」について知る必要はない。観測者は単にピューと通り過ぎる石を観測し、特殊相対論の公式を使って単位質量当たりの局所的エネルギー E_{shell}/m を計算する。特殊相対論では E_{shell}/m は全エネルギーを表し、それには静止エネルギー m と運動エネルギーが含まれている。すでに述べたように、無限遠で測られる一般相対性理論のエネルギーを静止エネルギーと運動エネルギーに分離することはできない。

しかし、 E_{shell} と運動の定数 E の間には関係がある。無限遠で静止していた石のエネルギーは無限遠で測ると $E = m$ である。したがって (3.27) 式を

$$\frac{E_{\text{shell}}}{E} = \frac{1}{\left(1 - \dfrac{2M}{r}\right)^{1/2}} \quad \boxed{\text{ブラックホールに落下するすべてのもの}} \quad (3.28)$$

と書くことができる。この式で E は運動の定数で、無限遠で測ったエネルギーであり、E_{shell} は球殻観測者によって測られる局所的なエネルギーである。(3.28) 式は一般的であることが後でわかる。第 5 章の練習問題で、同じ方程式が、固定された球殻から外側に向けて発光されたフラッシュにさえも使えることがわかる。

E_{shell} は局所的な量で、E は運動の定数である。

要するに E_{shell} は球殻観測者によって測られる局所的な量であり、特殊相対論の法則を使って分析できる量である。しかし E_{shell} は運動の定数ではなく、いろんな半径の球殻観測者によって異なる。(3.28) 式はこの局所的エネルギーと無限遠で測ったエネルギー E を結びつける。

石が中心に落下し始める位置が遠ければ遠い程、球殻観測者が測る石の速さ（(3.25) 式）は大きくなる。したがって局所球殻観測者が測ると、石のエネルギーは大きくなる。しかし、一般相対論では石には重力がはたらかず、石は「局所的にまっすぐな世界線である測地線に沿って自由に運動する」のだ。もし石に重力がはたらかないのなら、落下する石はどこから増加するエネルギーを得るのか。

「そのひどい帽子を」どこで買ったのかと尋ねられたボストンの貴婦人についての話である。「帽子を買ったとおっしゃいましたか」と彼女は言い、「わたくしは帽子など買っておりません。帽子をかぶっているのですよ」と答えた。同じように、落下する石はどこからもエネルギーをもらっていない。無限遠で観測される全エネルギーは石が自由に浮遊しても一定のままである。(3.25) 式はこの一定のエネルギーから得られる。ブラックホール＋石の系を軌道回転する灯台（97 ページの図 4 ）では石が落下するにつれてその系の全エネルギーが増加するのを確認できない。

待ってくれ。小さい球殻にいる球殻観測者が測ると、通過する石のエネルギー E_{shell} が大きくなるというのは本当ではないのか？

本当だ。E と E_{shell} を区別しなければならない。E は一般相対論にしたがう運動の定数で、運動エネルギーと位置エネルギー、静止エネルギーに分けることができない。それに対して E_{shell} は球殻観測者が特殊相対論の決まりにしたがって局所的に計算したエネルギーであり、しようと思えば運動エネルギーと静止エネルギー（質量）に分けることもできる。r が小さくなると、球殻観測者は E_{shell} が大きな値であることを観測する。しかし、各球殻観測者は局所的な解析で止めている。無限遠で測られるエネルギー E を採用しなければ、その解析をブラックホールを取り囲む時空全体に広げることはできない。

あきれるぜ。ニュートン力学の基本的結果のどこが間違っているのか。石が落下するにつれて、運動エネルギーが増え位置エネルギーが減っていく。そして、石の全エネルギーは変わらない。同じ言葉がなぜ一般相対論の記述にそぐわないのか。

ニュートンの解析は我々が使っている基準座標系のどれにも当てはまらない。各球殻観測者はすばやく通り過ぎて消えていくのを見て、局所的な事象だけを経験する。地平線近くの球殻観測者に対して石は光速に近い速さで運動しその系では運動エネルギー（と全エネルギー）が限りなく増える。これらの状況下で保存するものがあるのだろうか。石のすぐそばで自由落下する宇宙飛行士も限られた時空領域で特殊相対論を使う。宇宙飛行士に対して、石がブラックホールへ突入していくときのすべての事象で、石の運動エネルギーは地平線上でさえも 0 である。位置エネルギーから運動エネルギーへの変換などありはしない。シュワルツシルト記録係だけが時空が広がっているという描像を持っている。しかし、記録係に対し、石が地平線に近づくにつれて、速さが減っていき、地平線で 0 になり（(3.22) 式)、したがって、いわゆる運動エネルギーもそこでは 0 になる。記録係は無限遠で測定した石のエネルギーを運動エネルギー＋重力の位置エネルギーに分けることができない。もう一度言わなければならないだろう。一般相対論はエネルギー E を統一体として扱い、重力の位置エネルギーと運動エネルギー、静止エネルギー（質量）に分けることはできないのだ。

3.7 一線を越えてブラックホールに入る

急に引き込まれることも、揺さぶられることもない。そして隠された破滅へ。

ブラックホールの性質のうちで、シュワルツシルト地平線 $r = 2M$ ほど興味を掻き立てるものはないだろう。地平線は、越えると外の世界に戻る術を失い、信号を送ることす

らできないという帰還不能点だ。ブラックホールに落ちるとどうなるのか。地球からそこに行って経験した人はまだいない。さらに、それを行おうとする未来の冒険家も戻ってブラックホールについて語ることもできなければ、その体験をメッセージにして送ることもできないだろうなどと、我々は信じている。最終的な報告書を送ることができないにもかかわらず、ブラックホールの地平線に近づき、そして越えるときの経験を予言する理論の研究はよく進んでおり、検証され、その数は山ほどになる。

我々はブラックホールに吸い込まれない。

我々はブラックホールに「吸い込まれ」ない。 ブラックホールによほど近づかない限り、太陽が地球を引っ張り込むよりも強い引力ははたらかない。もし太陽が潰れてブラックホールになったとしても、地球とその他の惑星は揺らされることなく（永遠の闇夜が支配するが)、現在の軌道上をそのまま運動し続けるだろう。シュワルツシルト解は現在と同様に引続き地球の軌道を表すのに使えるだろう。第 4 章の練習問題によると、$300M$ 程度の大きな半径にある軌道では、ニュートン力学はよい近似として使うことができる。半径 $6M$ まで降りると、安定な円軌道は存在できないことがわかっており、さらに近づくと、螺旋を描いて落下し地平線を横切ってしまう。それでもロケットの出力が十分強ければ、いつでも脱出することができる。シュワルツシルト半径 $r = 2M$ に近づいたときだけ、我々は引き返すことができなくなり、閉ざされた運命の中に「呑み込まれる」。

自分がいつ地平線を横切るのかわからない。

シュワルツシルト地平線を通り過ぎるときに何も特別なことは起きない。 事象の地平線 $r = 2M$ を通過しブラックホールの中に入って行くときでさえも、振動を感じたり揺さぶられたり、引き込まれたりすることはない。確かに、潮汐力は落下するにつれて依然増加し続けるが、地平線でも滑らかに増加するだけであり、$r = 2M$ で突然八つ裂きになることもない。なるほど、シュワルツシルト計量の曲率因子 $(1 - 2M/r)$ はこの半径で 0 になるのだが、計量の時間の項は 0 になり半径の計量も無限大になるため、記録係座標 r と t の特異点になる。しかし時空幾何の特異点にはならず、この半径を通るとき、何かが途切れることも経験しない。シュワルツシルト半径で不連続にならない計量を持った座標系が存在する（プロジェクト B 「ブラックホールの内側」B.4 節 137 ページを見よ)。

地平線の内側では球殻系がない。

地平線の内側では球殻系が存在しない。 ブラックホールの外側にある球殻の上に立っているところを想像しよう。ここで「想像しよう」と言ったのは、地平線に外側から近づくにつれて「重力」は限りなく増加し、立っていられるような十分強い材質が存在しないためである。局所的にはこのような静止球殻は、ブラックホールに対して定常状態を保っているので、ロケットを噴射し続ける宇宙船に置き換えられる。地平線の内側ではどんなものも静止できないため静止球殻は存在しないのである。ロケットエンジンがすさまじい爆発をともなう噴射を続けてもロケットは静止しない。もともと星を構成している材質がどんなに強くてもブラックホールへの崩壊に抵抗することはできなかった。これと同じ不可逆崩壊が起きるため、地平線の内側ではどんな構造や物体も静止したままでいることが禁じられる。

荷物は内側に送ることができても、外側にはできない。

「外側の人」は「内側の人」に荷物を送ることができる。 異なった自由浮遊系はブラックホールの中でもまだ相対速度をもって運動する。例えば、ある旅行者が地平線のちょうど

外から静止状態で落ちる。推進力のない宇宙船が遠いところから静止状態で落ちてくる。3番目は内側に向けて投げつけられる。実際に、下に投げつけられた宇宙船が旅行者のすぐ後に打ち上げられれば、荷物と情報を外から内へ運ぶことができる（この章の練習問題ではこの3つの場合について考える)。光と電波も伝言を内側に伝えることができる。地平線の内側で落下していても星々を見ることができる。だが、方向や色、光の強度はすべて外の世界とは違っている（第5章の5.9, 5.11節、プロジェクトBのB.9節を見よ)。

内側では、t 座標と r 座標の性質の交換が起きる。 シュワルツシルト半径 $2M$ 以下の r 座標ではシュワルツシルト計量の曲率因子 $(1-2M/r)$ は負になる。その結果、計量の半径部分と時間部分で符号が逆転し、dt^2 の項が負になり dr^2 の項が正になるが、空間と時間はその役割を交換しない。するのは座標系である。t 座標は時間的座標から空間的座標に性質が変わる。同様に、r 座標は空間的座標から時間的座標へ性質が変わる。

地平線の内側での時間的な r 座標は、中心に向いた運動が不可避であることを意味する。

シュワルツシルト半径の内側で r 座標が「空間的座標から時間的座標に変わる」とは何を意味するのか？ 時間の経過が不可避なように、自由浮遊系の運動が r 座標の小さくなる方向に向かうことを意味する。ジェットエンジンによって進む宇宙船は $r=2M$ に到達する前では、ジェットエンジンを点火することで r が減少する運動（落下）から r の増加する運動（脱出）へ切替える選択肢が存在する。一旦、$r=2M$ の内側へ落下してしまうと、状況は全く逆になる。r の減少は時間経過の代わりとなる。旅行者がジェットエンジンに下す命令の中に時間を戻すというものはない。見えない力によってすべての人は否応なしに20歳から40歳に、または40歳から80歳に年をとるのだが、それがロケットを座標 $r=2M$ から後の「時間」の値 $r=0$ に引き寄せる。人間の意志やエンジン、ロケット、力、どれも時間を止めることはできない。細胞が死ぬのと同じくらい確実に、旅行者の時計が時を刻むのと同じくらい確実に、r は決して留まることなく $2M$ から 0 に減っていく。プロジェクトBのB.5節でこれらの結果を詳しく説明する。

ちょっと待ってくれ。地平線の内側では遠方時間 t にどんな意味づけができるのか。事象の遠方時間を確かめるために遠方観測者と情報交換しなければならなかった。しかし地平線の中の誰かとこのような情報交換することは不可能で、内側からの信号は地平線を通って外側へ届くことはないとあなたは言った。だから遠方時間は内側の突入者に対して意味を失うのではないか。

本質的には正しい。遠方時間は地平線の内側では少しばかり不便だ。確かに、遠方観測者が時間調整用のパルスを発射し、地平線の内側で受信し、そこで局所的な事象の時間を測るのに使うという複雑な計画を考えることもできる。しかし、以下の段落の説明にしたがって、突入者が近くの事象を腕時計で読んで記録し解析する方が簡単である。この「突入者時間」は139ページのプロジェクトB「地平線の内側の一方通行の運動」で述べる新しい計量に統合される。

地平線から破砕点までの腕時計時間

潰れる（$r=0$）までにかかる時間。 シュワルツシルト地平線を通過した後に、生存時間はどれくらいになるのか。109ページの例題2で、遠い距離で静止した状態から落下す

る物体が地平線から潰れるまでの腕時計時間を導く。メートルと秒で表すと

$$\tau[\text{メートル}] = \frac{4}{3}M \qquad \boxed{\text{地平線から中心まで}} \quad (3.29)$$

$$\tau[\text{秒}] = 6.57 \times 10^{-6}\frac{M}{M_{\text{Sun}}} \qquad \boxed{\text{地平線から中心まで}} \quad (3.30)$$

となる。ここで M_{Sun} は太陽の質量である。石を無限遠で静止状態から落下させよう。(3.29) 式と (3.30) 式で与えられる固有時は、地平線を横切ったときからブラックホールの中心に到達するまでの石の腕時計時間である。

地平線から破砕までの最大腕時計時間

地平線から潰れるまでに自由浮遊腕時計時間が最大になるのは、旅行者が地平線のちょうど外で静止状態から落下するときである。この最大腕時計時間 $\tau_{\max}$ は次の式によって与えられる（導出は練習問題で）：

$$\tau_{\max}[\text{メートル}] = \pi M \qquad \boxed{\text{地平線から中心まで}} \quad (3.31)$$

または

$$\tau_{\max}[\text{秒}] = 15.5 \times 10^{-6}\frac{M}{M_{\text{Sun}}} \qquad \boxed{\text{地平線から中心まで}} \quad (3.32)$$

15 マイクロ秒という最大値は、太陽と同じ質量のブラックホールに落下する場合、生活できるほど長くないようだ。しかし、地平線から潰れるまでの時間はブラックホールの質量に比例して増加する。260 万太陽質量のブラックホールが我々の銀河の中心に潜んでいると信じられているが、計算上の最大生存時間は数秒まで増加する。地平線を通過後、最大 40 年（1.26×10^9 年）生存するために、10^{14} 太陽質量（数千個の銀河の質量）のブラックホールを探そう。

大胆にもすでに存在するブラックホールをここで考えたように調査をするのか？ いいや。それどころか我々とブラックホール探検チームはそれ以上に大胆になろうとしている。ブラックホールの形成期に関心を持とうとしているのだ。非常に混み合い、今にも重力崩壊しそうな多重銀河の系に出かける。その端に到達した次の日に実際に崩壊が始まる。初めはゆっくりだが、徐々に速くなっていく。あらゆる場所から中心に向かって、ひどい雷雨 と物体と輻射の雷雨、運動量エネルギーの雷雨が降り注ぐ。銀河の物質が命知らずの探険家たちとともにシュワルツシルト半径 $r = 2M$ の地平線を滑らかに通り過ぎる。

生活は地平線の内側でも続く。

その瞬間から外側の世界へ信号を送る可能性をすべて失う。しかし外側の世界から送られた電波のメッセージや馴染みある星からの光、後を追って高速で発射された荷物は絶えず届けられる。さらに、我々、探険家の間のコミュニケーションは、地平線を横切る以前と同様に行われる。我々は時空領域の中で互いに発見したものを発表する。ラップトップコンピュータを使って、測定値を分析して至った結論をまとめて科学誌を作る。(我々のモットーである「出版そして廃刊」)

破砕の後に「その後」はない。

頭を上に 足を下に引っ張り、絶えず増加し続ける潮汐力ほど注意を引くものはない。

例題 2 地平線から潰れるまでの腕時計時間

あなたは遠い距離で静止状態から質量 M のブラックホールめがけてまっすぐ飛び込む。何とか測定して地平線を通過していることを知り、時計を正午に合わせた。潰れる瞬間までに、時計、それにあなたにはどれだけの時間があるだろうか。

解答

この問題は固有時 τ である腕時計時間と関係があり、この時間と r 座標の間の相関に関係がある。(3.20) 式から、無限遠における時間と宇宙船の固有時の間の相関、つまり $dt/d\tau$ がわかる:

$$\left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\tau}=1 \tag{3.19}$$

(3.22) 式から dr/dt つまり r 座標と無限遠時刻の間の関係がわかる:

$$\frac{dr}{dt}=-\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2} \tag{3.21}$$

(3.20) 式と (3.22) 式を使うと r 座標と腕時計時間の間の相関がわかる:

$$\frac{dr}{d\tau}=\frac{dr}{dt}\frac{dt}{d\tau}=-\left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2} \tag{3.32}$$

この式から、r 座標が dr 小さくなる間に苦しめられる固有時の変化 $d\tau$ が得られる:

$$d\tau=-\frac{r^{1/2}dr}{(2M)^{1/2}} \tag{3.33}$$

この式の両辺を $r=2M$ から $r=0$ まで積分すると

$$\tau=-\int_{2M}^{0}\frac{r^{1/2}dr}{(2M)^{1/2}}=-\frac{1}{(2M)^{1/2}}\frac{2}{3}r^{3/2}\Big|_{2M}^{0}$$
$$=\frac{2(2M)^{3/2}}{3(2M)^{1/2}}=\frac{4}{3}M \tag{3.34}$$

となる。この結果はメートルで表してあり、(3.29) 式と同じである。秒で表すために光速で割ると

$$\tau_{秒}=\frac{\frac{4}{3}M[メートル]}{c[メートル/秒]}=\frac{4}{9}\times10^{-8}M \tag{3.35}$$

となる。ここで、M はまだメートルの単位である。使いやすくするためこの結果を太陽質量 $M_{\mathrm{Sun}}=1477$ メートルで表す。この式に太陽質量

$$M=\frac{M}{M_{\mathrm{Sun}}}M_{\mathrm{Sun}}=\frac{M}{M_{\mathrm{Sun}}}(1477\ メートル) \tag{3.36}$$

を代入すると、

$$\tau[秒]=6.57\times10^{-6}\frac{M}{M_{\mathrm{Sun}}} \tag{3.29}$$

が得られる。

数年経過するまでもなくこの微分的に引力が大きくなり、もはや我々が生存できないほど強力になることが予測される。さらに、これから起きる完全な破滅を絶対的な確信をもって予言できる。この破滅では、足元の星、我々冒険家だけでなく、空間自身も呑み込まれる。「その次」というものがない瞬間が訪れるのだ。

図 6 に、無限遠で静止状態から出発した突入者の世界線を突入者の腕時計で測った場合とシュワルツシルト記録係の時計で測った場合について示した。

「物質」粒子が粒子として、事象の地平線を横切るという考えに未に悩まされている。球殻観測者はそれが光速で運動しているのを見るのだが、光速で運動するのは光である。粒子が地平線でフラッシュ光になってしまうのか。

いいや。地平線を自由落下しても何も感じず、フラッシュ光になることもない。球殻観測者

が地平線で観測するという考えが有効なのは限定された場合だけである。地平線のちょうど外側の球殻観測者は、粒子が光速より遅く落下するのを測定する。地平線で球殻を作るのは不可能だ。「重力の局所的な加速度」が限りなく増加するためだ（この章の終わりの練習問題 9 を見よ)。だから、球殻観測者は、落下中の粒子が光速で運動しているのを見るために地平線で留まることはできない。地平線上とその内部で、当てになるのは自由浮遊系観測者の測定である（しかし、2 人に報告することはできない)。

記録係座標に戻ると、重大な反論が待っている：記録係が計算すると、ブラックホールに落下する物体すべてが、地平線で止まって見えるならば、ブラックホールができるときに、落下した星自身を始め、それ以降に落下してきたガラクタによって永遠に囲まれてしまうのではないか。ロシア人はブラックホールを「凍結星」(frozen star) と呼んだ。私はそれを「凍結した瓦礫の山」と呼ぼう。

換算円周 r と遠方時間 t で測定すると、中心に向かう物体はすべて本当に地平線でゆっくりとなり静止する。この効果とは別の効果がある：光の重力赤方偏移だ。物体がそれぞれ地平線に近づくと、光はずっと赤い方向にずれる。この下方での偏移がどんなに速く起きるかを計算することができる（第 5 章の練習問題 9)。物体からの光はあっと言う間に見えなくなり、物体は黒くなり、遠方の観測者に関する限り、ブラックホールの一部になる。そこに留まっている黒い瓦礫の山はなおいっそう黒くなる。

3.8 まとめ

この章の結果の核心部分は、(1) シュワルツシルト計量と (2) 極値的加齢の原理から得られる。重力中心めがけて落下する石は 3 つのゴールポストを通過し、その各々のゴールポストは r 座標が固定され、通過するごとにフラッシュを発光する。最初と最後のフラッシュの時刻は固定するが、2 つ目のフラッシュは時間を変えて試す。最初から 3 番目のフラッシュまでの全腕時計時間が最大になるような 2 番目のフラッシュの発光時間を探そう。その結果は運動の定数になり、それを石の全エネルギーと同一視する：

$$\frac{E}{m} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\tau} \qquad \boxed{\text{自由粒子}} \qquad (3.12)$$

大きな半径 r でこれは特殊相対論における全エネルギーの式になり、またそうでなければならない。一般相対論では、全エネルギー E は全体的にとぎれなく滑らかで、運動エネルギーと位置エネルギー、静止エネルギー（質量）に分けることはできない。この大きさは遠くで、ブラックホールと石を加えた重力効果によって測られる。そのため E には**無限遠で測ったエネルギー**という名がついている。

無限に離れた距離で静止状態から落下した石のエネルギーは

$$\frac{E}{m} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\tau} = 1 \qquad \boxed{r = \infty \text{ で静止状態からの自由落下}} \qquad (3.19)$$

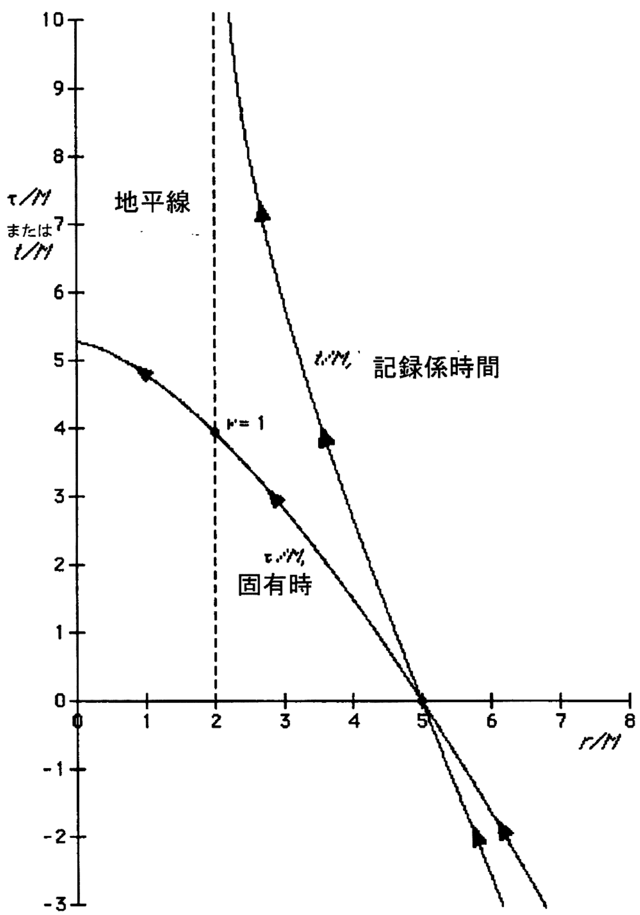


図 **3.6** コンピュータによるプロット：同一自由浮遊落下物体の **2** つの世界線。(**1**) シュワルツシルト記録係 t を使用。(**2**) 落下物体の腕時計の読みである固有時 τ を使用。r/M, t/M, τ/M 座標を使うと曲線は M と独立になり、シュワルツシルトブラックホールすべてに対して使えるようになる。あらかじめ、落下物体の腕時計時間と記録係時間は落下物体が $r = 5M$ を通過するときに **0** を指すようにしてある。記録係のプロットは (**3.22**) 式によって描かれ、落下物体のプロットはプロジェクト **B** の **B.2** 節にある。

例題 3 石をブラックホールに投げ入れると

(3.25) 式にしたがうと、初速 0 で無限遠からブラックホールに落下する石が事象の地平線を通過したとき、近傍の球殻観測者が測ると、光速で運動する。遠い距離から内側に石を静止状態で落下させるのではなく、むしろ投げつけることによって、光速よりも大きな「最終観測速度」を達成することができるだろうか。

解答

(3.12) 式から始めよう：

$$\frac{E}{m}=\left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\tau}=\text{定数} \tag{3.12}$$

遠方 ($2M/r \ll 1$) で石が止まっていなければならない ($dr/dt=0$) と要請することにより (3.20) 式を求め、この定数を評価した。ここでは一般的な場合を扱う。つまり、石の初期速度の半径成分は $dr/dt=-v_{\text{far}}$ である。ここで、添字 “far” は、ブラックホールからずっと遠方にあるという条件を表している。大きな r では時空は平坦で、dr と dt は通常の特殊相対論的な意味をもっており、そのために速度は dr/dt になる。平坦時空では、速度差を見分ける必要がない。定数の値は特殊相対論の値 $E/m=\gamma_{\text{far}}$ と等しく、定義

$$\frac{E}{m}=\left.\frac{dt}{d\tau}\right|_{\text{大きい } r}=\gamma_{\text{far}}\equiv\frac{1}{(1-v_{\text{far}}^2)^{1/2}} \tag{3.37}$$

にしたがう。この結果を (3.12) 式に代入すると

$$\frac{E}{m}=\left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\tau}=\gamma_{\text{far}} \tag{3.38}$$

が得られる。両辺に $d\tau$ をかけ、$d\tau$ に (3.21) 式を代入すると、(3.22) 式を求めるときに行ったように

$$\begin{aligned}&\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt\\&=\gamma_{\text{far}}d\tau\\&=\gamma_{\text{far}}\left(\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2-\frac{dr^2}{\left(1-\frac{2M}{r}\right)}\right)^{1/2}\end{aligned} \tag{3.39}$$

となる。これを dt で割り、dr/dt について解き、半径が減少することに対応する負の符号を選ぶと

$$\frac{dr}{dt}=-\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left[1-\frac{1}{\gamma_{\text{far}}^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)\right]^{1/2} \tag{3.40}$$

となり、(3.23) 式と (3.24) 式から

$$\frac{dr_{\text{shell}}}{dt_{\text{shell}}}=\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\frac{dr}{dt} \tag{3.41}$$

が得られる。したがって

$$\frac{dr_{\text{shell}}}{dt_{\text{shell}}}=-\left[1-\frac{1}{\gamma_{\text{far}}^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)\right]^{1/2} \tag{3.42}$$

となる。$r=2M$ のシュワルツシルト半径に石が近づくにつれて、2 つの速度 dr/dt, $(dr/dt)_{\text{shell}}$ には何が起きるのか？ すでに述べたように、記録係速度 ((3.40) 式) はゼロになる。「球殻速度」$dr_{\text{shell}}/dt_{\text{shell}}$(3.42) 式は $r=2M$ で 1、つまり光速 1 になる。どんな可能な速度 v_{far}（どんなガンマ因子 γ_{far}）で石を下に投げても、地平線を横切るときに、その速度は増加しない。光速は一般相対論でも、直接観測可能な速さの中で最も速い。

となる。ところで、初期速度 v_{far} で遠い距離から投げ出された石の全エネルギーは

$$\frac{E}{m}=\left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\tau}=\gamma_{\text{far}}=\frac{1}{(1-v_{\text{far}}^2)^{1/2}} \qquad \boxed{r=\infty \text{ からの投げつけ}} \tag{3.37), (3.38}$$

で与えられる。半径 r_0 の球殻上で静止している物体の全エネルギーは

$$\frac{E}{m}=\left(1-\frac{2M}{r_0}\right)^{1/2} \qquad \boxed{r_0 \text{ で静止状態から}} \tag{3.18}$$

によって与えられる（練習問題 1)。無限遠で静止した状態から放された石の場合をさらに詳しく調べた。シュワルツシルト計量を使うと、半径の関数として記録係速度 dr/dt は

$$\frac{dr}{dt} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2} \qquad \boxed{r = \infty \text{ で静止から}} \qquad (3.21)$$

であり、半径 r の球殻観測者が測ると、石の速度は

$$\frac{dr_{\text{shell}}}{dt_{\text{shell}}} = -\left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2} \qquad \boxed{r = \infty \text{ で静止から}} \qquad (3.24)$$

である。半径 r で留まっている球殻観測者はこの速度と特殊相対論の式を使って、通過する石の局所的なエネルギーを計算する：

$$E_{\text{shell}} = \frac{E}{\left(1 - \dfrac{2M}{r}\right)^{1/2}} \qquad (3.27)$$

球殻エネルギーは運動の定数ではなく、球殻観測者が直接測るエネルギーである。この式は局所的エネルギー E_{shell} と無限遠で測られた全エネルギー E の間の関係において特別な場合となっている。この式はフラッシュ光や無限遠から投げられた石、その他のエネルギーの形に適用できる。石の場合、E_{shell} は特殊相対論で計算される全エネルギーを表し、静止エネルギー m と運動エネルギーからなる。

遠くで静止状態から落下してくる石の場合に戻ると、地平線を通り過ぎてから、ブラックホールの中心の破砕点に到達するまでの腕時計で記録される時間（固有時）を計算することができる：

$$\tau[\text{メートル}] = \frac{4}{3} M[\text{メートル}] \qquad \boxed{\text{地平線から潰れるまで}} \qquad (3.28)$$

$$\tau[\text{秒}] = 6.57 \times 10^{-6} \frac{M}{M_{\text{Sun}}} \qquad \boxed{\text{地平線から潰れるまで}} \qquad (3.29)$$

地平線から破砕点までの最大時間は (3.31) 式と (3.32) 式によって与えられる。

3.9 参照文献

87 ページの引用はアインシュタインによるもので、アインシュタインに相対論の短い説明を求めた 1921 年のレポーターのグループに対する答えである。Ronald W. Clark, *Einstein, The Life and Times*, Avon Books, New York（ペーパーバック版）469 ページからの引用。

この章は Charles W. Misner, Kip S. Thorne, John Archibald Wheeler の *Gravitation*, W. H. Freeman and Company, San Francisco（現在 New York）1973 年にアイディア

と図、本文を大いに参考にしている。少なくとも1段落は John Archibald Wheeler の *A Journey into Gravity and Spacetime*, W. H. Freeman and Company, New York からの引用である。加えて、我々の本は *Black Holes:The Membrane Paradigm,* Kip S. Thorne, Richard H. Price, Douglas A. Macdonald 編集 Yale University Press, New Haven, 1986 の Douglas A. Macdonald, Richard H. Price, Wai-Mo Suen, Kip S. Thorne "Nonrotating and Slowly Rotating Holes" を参照している。

「もっとブラックホールについて」の参照文献について。このボックスでは John Archibald Wheeler, "The Lesson of the Black Hole," *Proceedings of the Americal Philosophical Society,* Volume 125, Number 1 25–37 ページ (1981 年 2 月) と J. Michell, *Philosophical Transactions of the Royal Society,* London, Volume 10, 42–43 ページ (1784) の部分的な抜粋である。S. Schaffer, "John Michell and Black Holes," *Journal for the History of Astronomy,* Volume 10, 43–43 ページ (1979) ; P.-S. Laplace, *Exposition du système du monde,* Volume 2 (Cercle-Social, Paris, 1795) , modern English translation in S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time,* Cambridge University Press, Cambridge, U. K., 1973, 365–368 ページ; J. R. Oppenheimer and H. Snyder, *Physical Review,* Volume 56, 455–459 ページ (1939) (第二次世界大戦が始まった日に出版) の中で引用、議論されている。引用したもの: Stuart L. Shapiro and Saul A. Teukolsky *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects,* John Wiley and Sons, New York, 1983, 338 ページ; R.P. Kerr *Physical Review Letters,* Volume 11, 237–238 ページ (1963) ; N. T. Newman, E. Couch, K. Chinnapared, A. Exton, A. Prakash, R. Torrence, *Journal of Mathematical Physics,* Volume 6, 918–919 ページ; S. W. Hawking "Black Hole Explosion?" *Nature,* Volume 248, 30–31 ページ (1974 年 3 月 1 日) ;Steven Detweiler 編集 *Black Holes: Selected Reprints,* American Association of Physics Teachers, New York, 1982 年 12 月も見よ。これには John Michell, Karl Schwarzschild, S. Chandrasekhar, J. Robert Oppenheimer, H. Snyder, Roy P. Kerr, S.W. Hawking らの論文のリプリントがある。

Porus Lakdawala は最も速い石に対する光速の練習問題を加えることを勧めてくれた。Rea Yip は突入する石のエネルギーのニュートン近似の練習問題を勧めてくれた。

第3章の練習問題

1. 無限遠、静止状態からの落下

質量 $M = 5$ キロメートルで地平線が $r = 2M = 10$ キロメートルのアルファという名のブラックホールがある。石が静止状態で遠方からアルファめがけてまっすぐに落下する。

A. $r = 35$ キロメートルにいる球殻観測者を石が通り過ぎるとき、その速度を球殻観測者が測るといくらになるか（答えに近い数値は -0.5 である。有効数字 3 桁まで求めよ）。
35 キロメートルを通り過ぎるときの記録係の速さ dr/dt を求めよ（答えは -0.4 に近い。3 桁まで求めよ）。

B. $r = 25$ キロメートルの球殻観測者を石が通り過ぎるとき、その速度を球殻観測者が測るといくらになるか（答えに近い数値は -0.6 である。3 桁まで求めよ）。
25 キロメートルを通り過ぎるときの記録係の速さ dr/dt を求めよ（答えは -0.4 に近い。3 桁まで求めよ）。

C. 本文中の公式から、この二つ半径における相対球殻速度について何が期待できるか。各半径で、球殻速度と記録係速度の相対速度についてはどうか。定性的に答えよ。

D. 極限値 $r \to 2M$ で石の速さはいくらになるか。記録係の速さはいくらか。

2. 最大の記録係速度

質量 M のブラックホールから離れて静止状態から石をそっと放す。石は中心へまっすぐ落下し、記録係の記録では、石の落下速度は初めのうち増加し、地平線に近づくにつれて、0 へ減少していくことがわかっている。したがって記録係速度はどこかその間の半径 r で最大値にならなければならない。記録係速度の最大値を求めよ。図 5 で、答えをチェックせよ。難しい任意の問題：より一般的な場合として、ブラックホールに投げられた石の記録係速度の最大値を求めよ（例題 3）。その答えを初期速度が 0 のときに適用せよ。

3. 中性子星を撃つ

典型的な中性子星の質量は、太陽質量の約 1.4 倍（観測的によく知られている値）であり、半径がほぼ 10 キロメートルである（観測的によくわかっていない）。遠くから静止状

態で石が回転していない中性子星の表面に落ちる。中性子星の質量と半径は上記の通りである。

A. この中性子星がブラックホールならば、地平線の r の値はいくらになるだろうか。その値と中性子星の半径の比はいくらか。
B. 石が中性子星の表面に当たるとき、表面上で立っている誰か（そんな人がいるのか？）が測定する石の速さはいくらか。
C. 遠方の記録係では表面に当たるときの速さいくらになるか。
D. 表面観測者では石が表面に当たるときの単位質量当たりの運動エネルギーはいくらになるか。
E. 遠方観測者では石が表面に当たるときの単位質量当たりのエネルギーはいくらになるか。
F. ニュートン力学にしたがうと、石が表面に当たるとき、その速さと質量当たりのエネルギーはいくらになるか。その答えを B, C, D の結果と比べよ。

4. 下に投げられた石の球殻エネルギー

遠方からブラックホールに向けて投げられた石の全エネルギー E と、後に球殻観測者によってその石のエネルギーが測られたときの値 E_{shell} の間の関係を求めよ。v_{far} を無限遠での速さ、$\gamma_{\text{far}} = (1 - v_{\text{far}}^2)^{-1/2}$ をその速さにおける伸びの因子とする。

遠い距離からブラックホールに投げ入れられた石の式 (3.42) から始めよ：

$$\frac{dr_{\text{shell}}}{dt_{\text{shell}}} = -\left[1 - \frac{1}{\gamma_{\text{far}}^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\right]^{1/2} \qquad \boxed{\text{投げ入れられた}} \quad (3.42)$$

さて、特殊相対論におけるエネルギーの式は球殻観測者が行う観測に適用できる。特殊相対論の式と (3.42) 式を使って、球殻観測者が測った場合の落下する石のエネルギー E_{shell} を求めよ。この石に対して、球殻エネルギーと全エネルギー E が一般的な式 (3.28) を満たすことを確かめよ。

5. 最速の石に対する光速

伸びの因子 γ_{far} で石を遠方からブラックホールにまっすぐに投げた。換算円周 r に向けて落下したときの石の球殻と記録係の速さが例題 3 からわかる。それでは、遠方での γ_{far} が無限大になるように初期エネルギーをどんどん大きくしよう。言い替えれば、石がフラッシュ光の性質をもつようにしよう。

A. 記録係によって計算される光の速度（dr/dt）と球殻観測者が直接測定する速度

($dr_{\mathrm{shell}}/dt_{\mathrm{shell}}$) がそれぞれ

$$\frac{dr}{dt} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \qquad \boxed{光} \quad (3.43)$$

$$\frac{dr_{\mathrm{shell}}}{dt_{\mathrm{shell}}} = -1 \qquad \boxed{光} \quad (3.44)$$

であることを示せ。これらの結果の (3.44) 式は十分納得がいく結果のようだ。(3.43) 式はおかしいように見える。もっと調べてみよう。

B. ブラックホールからずっと離れた ($r \to \infty$)「光の半径方向の記録係速度」は何か。

C.「光の半径方向の記録係速度」の大きさはブラックホールに近づくと大きくなるか小さくなるか。

D. 地平線に近づく極限 ($r \to 2M$) で「光の半径方向の記録係速度」はどうなるか。

実際、(3.43) 式が記録係の半径方向の光速であることが 205 ページで示される。

6. ブラックホールを使ったエネルギーの変換

進んだ文明ではブラックホールをエネルギー源として使っているかもしれない。角運動量のある「活きた」ブラックホールが最も有望であろう。プロジェクト F 「自転するブラックホール」を見よ。残念だが、この章で調べた自転しないブラックホールは「死んで」いて、エネルギーを取り出すことができない（ホーキング輻射を除く。29 ページのボックスを見よ）。しかし、この練習問題で確かめられるように、質量をエネルギーに変換するために役立たせることができる。

質量 m のゴミくずの入った袋をブラックホールへ投げ捨てる。捨てる地点でごみ袋は静止しており、無限遠で測るとそのエネルギーは質量と等しいつまり $E/m = 1$ である。それに対して換算円周 r_0 の球殻で静止している質量 m のエネルギーは小さく、98 ページの例題 1 の (3.18) 式で与えられる：

$$\frac{E}{m} = \left(1 - \frac{2M}{r_0}\right) \qquad \boxed{静止した物体} \quad (3.45)$$

事象の地平線近くの r_0 ($r_0 \to 2M$) では、エネルギーは 0 に近づく。ゴミくずをブラックホールに投げ入れ、地平線の近くで止めることで、ゴミくずの静止エネルギー（質量）を有益なエネルギーの形に変換する何らかの方法はあるのだろうか。さらに、この結果の途中でどんなエネルギー変換が行なわれるか。以下の概略的質問にしたがうか、別の方法を使って問題について考えよ。

A. やってくる質量 m の袋をゆっくりと止め、局所的運動エネルギーすべてを光に変換する機械を換算円周 r_0 の球殻に設置することを考えよう。どれくらいの運動エネルギーが光に変えられるか。

B. 機械は、作ったフラッシュ光を外向き半径方向に放つ。(3.28) 式を光に適用し、ごみを捨てた半径の発電所に届いたときの光のエネルギーを計算せよ。

C. この変換器の r 座標を地平線の値に近づけるという極限をとる。この極限において、捨てられた点でのゴミくずの静止エネルギーのすべてが遠方における光のエネルギーとして戻されることを示せ。

D. それで、変換器で止められたゴミはブラックホールに廃棄される。変換器が地平線にあるという極限的な場合において、この練習問題で述べたようにゴミが捨てられてもブラックホールの質量が変化しないという確固たる議論を構成して述べよ。したがって、ゴミの質量が光のエネルギーに変換されることは、孤立系（ゴミ＋ブラックホール）のエネルギー保存則を破らない。

E. もし半径方向の光の速度についての練習問題 5 を終えていれば、地平線から運ばれたエネルギーが遠方の廃棄点で使えるようになるまでにはどれくらい時間がかかるかを答えよ。地平線に変換器を置くことの他にどんな困難があるか。

考察：ブラックホールの近傍がゴミでまき散らかされているとする。ゴミをブラックホールに捨てることによってきれいにすることができ、ブラックホールの周りを少しでも秩序ある状態にすることができる。熱力学と統計力学の強力な原理によると、孤立系（ゴミ＋ブラックホール）の無秩序は自発的に減ることができない。したがってゴミを捨てると、ブラックホールの無秩序は増加しなければならない。ベッケンシュタイン（Jacob Beckenstein）とホーキング（Stephen Hawking）は無秩序を定義するためにこの議論を定量化した。ソーン（Kip S. Thorne）, *Black Holes and Time Warps*, 422-448 ページを見よ。

7. ブラックホールへの落下

質量 m の時計が事象の地平線の外側にあり、 半径 r_0 の球殻にボルトで取り付けられている。ボルトが緩み、時計は中心に向けて真っ逆さまに落ちる。

A. r 座標で小さい値の球殻を通るとき、記録係速度 dr/dt と球殻速度 $dr_{\text{shell}}/dt_{\text{shell}}$ はどうなるか。ブラックホールの地平線を通過するときの速度はいくらか。
答えが以下になることを示せ：

$$\frac{dr}{dt} = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left[\frac{\dfrac{2M}{r}-\dfrac{2M}{r_0}}{1-\dfrac{2M}{r_0}}\right]^{1/2} \tag{3.46}$$

$$\frac{dr_{\text{shell}}}{dt_{\text{shell}}} = -\left[\frac{\dfrac{2M}{r}-\dfrac{2M}{r_0}}{1-\dfrac{2M}{r_0}}\right]^{1/2} \tag{3.47}$$

時計がどの球殻から落下したかに関係なく、地平線 $r = 2M$ の球殻速度が常に光速であることに注意する。

いくら何でもひどすぎる。地平線 $r = 2M$ から 1 メートル離れた換算円周 r_0 の球殻から物体を落下させれば、この物体はわずか 1 メートルの間に光速に加速されると本気で言っているのか。記録係速度 dr/dt は同じ時間内に 0 になるとも言っている。あなたは本当に一線を越えて「逝ってしまった」のか。

シュワルツシルト座標の運動は確かに地平線近くでおかしくなる。球殻半径の増分 dr_{shell} と換算円周の増分 dr の間の関係を見よ：(この本の終わりの公式集の (D) 式)

$$dr_{\text{shell}} = \frac{dr}{\left(1-\dfrac{2M}{r}\right)^{1/2}} \tag{D}$$

あなたの質問は、もし地平線から 1 メートル離れた換算円周 r_0 から落下した物体が 1 メートルの間に光速に加速されるのかということである。しかしこの式から、地平線近くに動くと、球殻観測者が測る半径距離は r 座標の変化に比べずっとずっと大きく伸びることになる。地平線の直前では r 座標は球殻系で大きな距離に引きのばされ、加速度により光速になるだけの十分な球殻距離がある。

地平線の近くでは球殻系は現実的には意味をなさない。地平線上でむちゃくちゃになる。どこで正常に戻れるのか。いつものように自由浮遊系である。事象が落下物体の腕時計によって測られるとき、換算円周 r の球殻は引き続いて通り過ぎていく。この自由浮遊系から観測すると、練習問題 8 で示すように地平線で特別奇妙なことは起きない。

B. ブラックホール建設という会社のロボットがブラックホール アルファの周り $r = 40$ キロメートルの球殻を補修している。アルファの質量は $M = 5$ キロメートルで、地平線は $r = 2M = 10$ キロメートルである。ロボットが持っていたスパナがそっと落ち始めた。

$r = 25$ キロメートルにいる観測者が、通り過ぎるスパナの速度を測定するといくらになるか。この速度は、無限遠から $r = 25$ キロメートルに落ちてきたときの速度よりも大きくなるべきか、小さくなるべきか (練習問題 1 の B)。予想は正しかったか。

C. スパナが $r = 25$ キロメートルを通り過ぎるときの記録係速度 dr/dt はいくらか。この速さは、無限遠から落下してきた石は $r = 25$ キロメートルに落下してきたと

きの記録係の速さよりも大きくなるべきか、小さくなるべきか（練習問題 1 の B）。予想は当たったか。

D. スパナが地平線 $r = 2M$ に近づくと、球殻観測者速度と記録係速度はどうなるか。

E. A に戻って、半径 r の球殻観測者に特殊相対論を使わせて、$E_{\text{shell}} = m/(1 - v_{\text{shell}}^2)^{1/2}$ とする。A の結果の v_{shell} を代入し例題 1 の結果を使って、r_0 を消去する。$r < r_0$ を仮定することで、その結果が (3.28) 式と一致することを示せ。

8. 中心までのスケジュール

宇宙飛行士が r_0 の球殻からそっと飛び降りる。落下時刻から中心に到達するまでの間、その人の腕時計でどれくらい時間が経過するか。地平線のちょうど外から飛び降りると、地平線から潰れるまでの自由浮遊時間はどれくらいかかるか（地平線から潰れるまでの時間の最大値については 108 ページの (3.31) 式と (3.32) 式を見よ）。

ヒント：まず最初の目標として、腕時計時間 τ に対して r 座標の変化率 $dr/d\tau$ を r と r_0 で表せ。積分変数が r/r_0 となる積分をつくれ。積分の範囲を $r/r_0 = 1$（落下点）から $r/r_0 = 0$（ブラックホールの中心）にせよ。積分は

$$\tau = -\frac{r_0^{3/2}}{(2M)^{1/2}} \int_1^0 \frac{(r/r_0)^{1/2} d(r/r_0)}{(1 - r/r_0)^{1/2}} \tag{3.48}$$

となる。この積分を以下のトリックを使って解け。トリック以外の何ものでもない。$r/r_0 = \cos^2\psi$ を代入することで簡単にし（「角度 ψ」はどこかで測定できるものではなく、単に積分変数である）、$(1 - r/r_0)^{1/2} = \sin\psi$, $d(r/r_0) = -2\cos\psi\sin\psi d\psi$ とする。積分の範囲は $\psi = 0$ から $\psi = \pi/2$ である。これらを代入することで、固有時に対する積分は

$$\begin{aligned} \tau &= 2\frac{r_0^{3/2}}{(2M)^{1/2}} \int_0^{\pi/2} \cos^2\psi d\psi \\ &= 2\frac{r_0^{3/2}}{(2M)^{1/2}} \left[\frac{\psi}{2} + \frac{\sin 2\psi}{4}\right]\Bigg|_0^{\pi/2} \end{aligned} \tag{3.49}$$

となる。この答えはすぐわかる。その単位は光進時メートルである。それではこの結果を秒に変換し、地平線のちょうど外側からそっと落すという特殊な場合について調べよ。

9. 球殻上の重力加速度

球殻 $r = r_0$ 上でロボットが道具をうっかり落してしまった。初速度は 0 である。ロボットが測定する道具の初期加速度はいくらか。この質問に答えるために、以下の要点を押さえた質問を使うか、または別の方法を使ってもよい（この問題の A は第 2 章の練習問題 6 の A と同じである）。

A. ニュートン加速度を幾何学単位で表せ。ニュートンにしたがうと、球対称な引力中心から r_0 の距離における中心向きの加速度は通常の単位でいくらか。結果を $g_{\text{conv}} = d^2r/dt^2$ で表せ。ここで "conv" は、「通常の単位 "conventional unit"」という意味である。それでは dt(メートル) $= cdt$(秒) とし、幾何学単位で表すとニュートン的予測が

$$g = \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{M}{r_0^2} \qquad \boxed{\text{ニュートン}} \quad (3.50)$$

であることを示せ（加速度が負の半径方向であることは無視せよ）。これらの単位を使うと、地上での重力加速度 g_{E} はいくらになるか。g_{Econv} を通常の単位で重力の加速度とする。g_{E} の幾何学単位はメートル $^{-1}$ であり、近似値が

$$g_{\text{E}} = \frac{g_{\text{conv}}}{c^2} = 10^{-16}\text{メートル}^{-1} \qquad \boxed{\text{ニュートン}} \quad (3.51)$$

となることを示せ。

B. 以上のことがらについて、対応する一般相対論の予測はどうなるか。まず最初に dr と dt のどちらについて考えるかを決める必要がある。練習問題の書き方によると、予言のため測定に従事しているのは球殻観測者である。したがって $d^2r_{\text{shell}}/dt^2_{\text{shell}}$ がわかればよい。練習問題 7 の結果から

$$\frac{dr_{\text{shell}}}{dt_{\text{shell}}} = -\left[\frac{\dfrac{2M}{r} - \dfrac{2M}{r_0}}{1 - \dfrac{2M}{r_0}}\right]^{1/2} \quad (3.52)$$

である。r_0 が固定されていることを思い出しつつ、dt_{shell} で微分する。すると右辺には dr/dt_{shell} が現れるだろう。その dr は換算円周 r の変化であり球殻座標ではない。本書巻末の公式集の (D) 式を使って微分から dr を消去せよ。$dr_{\text{shell}}/dt_{\text{shell}}$ に (3.52) 式を代入せよ。$r = r_0$ で評価し、簡単な式

$$\begin{aligned} g_{\text{shell}} &= \left.\frac{d^2r_{\text{shell}}}{dt^2_{\text{shell}}}\right|_{\text{静止状態から}} \\ &= \frac{M}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r_0}\right)^{-1/2} \end{aligned} \quad (3.53)$$

を導出せよ（ここでも負の符号を無視せよ）。以下の極端な場合どうなるか。(1) r_0 が $2M$ に近づく。(2) r_0 が大きな値になる（だが無限遠にならない）。

C. ロボットが質量 5000 メートルのブラックホールの近く $r_0 = 4M$ の球殻の上に立っている。落ちた道具の初期の加速度は何「ジー」(g) か。つまり、地球の重力加速度の何倍になるか。ニュートンの予言ではどうなるか（戦闘機が $7g_{\text{E}}$ かそれ以上の加速度になったとき、操縦士は意識を失うという危険にさらされる）。

D. 練習問題 3 で述べた典型的な中性子星の表面の重力加速度はいくらか。

E. 任意の問題：あなたには、ロケットを噴射してブラックホールの地平線のちょうど上で浮いてみたいという願望がある。換算円周を $r_0 = 2M + dr$ とし、$dr \ll 2M$ とする。これらの状況で、g_{shell} の近似式を求めよ。意識を失わないように、宇宙船の中の g_{shell} を $7g_{\text{E}}$ としたい。$dr = 1$ キロメートルとすると、この計画で選ばなければならないブラックホールの質量 M はいくらになるか。答えを太陽質量の何倍かで表せ。

10. 宇宙船の地平線警報機アラーム

架空の質問。宇宙事業団は宇宙船（とあなた）の運命が気がかりであり、ブラックホールに突っ込んで取り返しがつかなくなるという危険が迫ると、自動的に鳴る警報機を設置するよう求めた。手始めに、宇宙船は非常に遠くから静止状態で落下し、質量 M のブラックホールからどのくらい離れているかを察知し地平線に近づくと鳴る機械がついていると仮定する。一度設定してしまうと、装置はその内部の計器の読みと宇宙船内の器具だけに頼らなければならず、外部からの情報は得られない。このような装置はどのような原理に基づいて作動しているのか。設計図を引くことは朝飯前か。装置のパラメータを設定するとどこまで行けるか。つまり既知の質量 M のブラックホールに対する数値的な感度を指定することによりどこまで行けるか。**任意の問題：** 以下の内容も付け加える。(a) あなたの体が耐え切れないほどの潮汐力に近づいたとき、2 つ目の警報機が鳴る。(b) 警報機が鳴るとロケットが点火し、そのときの半径 r の球殻に踏みとどまりたいであろう。重力加速度が $3g_{\text{Earth}}$ よりも大きい球殻に達すると 3 番目の警報機が鳴って警告すべきである。

11. ニュートン近似での突入エネルギー

速度が小さく $2M/r$ の値が小さいとき、落下する粒子の一般相対論的なエネルギーがニュートンの結果と一致することを示せ。以下の要点を押えた質問にしたがって進んでもよいし、独自の方法を使ってもよい。

A. 重力中心の周りで自由落下する粒子の全エネルギーについてニュートン的な式を作れ。幾何学単位に変換し、結果が

$$\frac{E}{m} = \frac{1}{2}v^2 - \frac{M}{r} \qquad \boxed{\text{ニュートン}} \quad (3.54)$$

と書けることを示せ。

B. その次に粒子の一般相対論的エネルギー (3.12) 式

$$\frac{E}{m} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\tau} \tag{3.55}$$

を考える。

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{dt}{dt_{\text{shell}}}\frac{dt_{\text{shell}}}{d\tau} \tag{3.56}$$

とし、$|d| \ll 1$ かつ $|nd| \ll 1$ に対する近似

$$(1+d)^n \approx 1 + nd \tag{3.57}$$

を何回か使い、近似的に

$$\frac{E}{m} \approx 1 + \frac{1}{2}v_{\text{shell}}^2 - \frac{M}{r} \quad \boxed{\text{ニュートン？}} \tag{3.58}$$

になることを示せ。

C. (3.54) 式と (3.58) 式は互いにどう違うか。この差をどう説明するか。

プロジェクトB

ブラックホールの内側

自転していないブラックホールの地平線の内側

- ブラックホールに落ちると、光よりも速くなるのか。
- なぜ地平線の外側にいる友人にメッセージを送ることができないのか。
- 死は即座にそして痛みをともなわずに訪れるのか。
- 最後に何を見るのか。

アリスがハッと思ったときには、もう深い、深い井戸のような穴のなかへ、落ちてゆくところでした。井戸がたいへん深かったか、それともアリスの落ちかたが、たいへんゆっくりだったどちらかです。アリスは落ちてゆきながら、ゆっくりあたりを見まわしたり、このつぎには、どんなことが起きるかしらなどと、考える時間がじゅうぶんありました。まず、アリスは下のほうを見て、どんなところへ落ちてゆくのか、見さだめようとしました。けれども、まっくらで、なにひとつ見えません。そこで井戸の内がわをながめますと... 何しろ不思議なことばかりつづけざまに起こるので、アリスはどうしてもできないことなんて、めったにあるものでないという気がしてきたのです。

— ルイス・キャロル 『ふしぎのくにのアリス』 （田中俊夫訳 岩波書店）

注意： このプロジェクトの **8–10** 節は第 **4,5** 章の内容を用いる。

B.1　飛び込み予定者へのインタビュー

— さて、あなたはブラックホール突入研究チームの一員に志願していますね。

「はい。」

— ブラックホールに飛び込んだ経験はありますか。

「ご冗談でしょう。」

— あなた方の研究の成果は地平線の外の我々には報告することができないのに、なぜこの計画に加わりたいと思っているのですか。

「我々突入チームは宇宙飛行士学校で苦楽を共にしてきました。我々は専門として、ブラックホールについて徹底的に勉強してきていますし、ブラックホールの内側の条件が正しく予言できているかどうかを確かめることにとても魅力を感じています。我々はみんな生涯をこの旅行で終えたいと望んでいます。」

— ブラックホール突入チームは、なぜ地平線の内側で自由落下系を使うのか教えてください。

「地平線の内側では、静止した球殻は存在できません。原理的にも不可能です。でも自由落下系は最も単純で最も普遍的なんです。」

— それじゃあ、球殻を使わないで、半径方向の位置 r はどうやって測るのですか。

「軌道の反対側で、中心に向けてまっすぐにテスト粒子を落しそこまでの距離から r の値を求めます。」

— 時計はどんなものを使うのですか。

「腕時計をつけていきます。」

— 軌跡について何か知っていますか。

「基本的には、ブラックホールから遠く離れたところで静止した状態から出発し、下の方に落下していきます。」

— いつ地平線を通過するのですか。

「どの時計で測ったときの時刻を答えればよいのですか。」

— よくご存知ですね。あなたの腕時計で地平線を通過するのはいつですか。

「それがですね、腕時計の 0 時は任意に合わせられます。旅行のために、宇宙飛行委員会にはすべての時計を合わせる面白い計画があります。我々の腕時計も含めてですが。もう少し詳しく話しましょうか。」

— 今は結構です。追加物資の供給計画の要点を教えていただけますか。

「小荷物を供給してもらう必要はありません。でも供給しようとすれば、我々の後ろから思いっきり強く投げるか、我々が到達する前に地平線近くの球殻から落してもらい我々が追いつくようにするかどちらかになるでしょう。すべての物資を運んでいくことの方が簡単で安上がりです。」

— あなたが地平線を通過した後に、我々に何かできることはありますか。

「そうですねえ。地平線の外で起きた、ラジオやテレビの最近のニュースや科学のレポートを送って頂けるとありがたいです。」

— あなた方からのラジオ放送を我々に送るときには周波数を変えてくれますか。

「これも冗談ですか？」

— もちろんですとも。あなたの健康や安全に対する本質的なものも含めて、このような予言のすべては地平線の内側のシュワルツシルト計量の正当性にかかっています。

「私は予測の正確性に命を賭けています。我々が選んだブラックホールは古く、そのため、地平線の内部に形成時に閉じ込められた重力波の海は弱くなってしまっているだろうと考えられます。我々は飛び込むことでしか、計算が正しいかどうかを知ることができません。」

— あなたの命のことについて言えば、地平線に入ってからあなたの時計で 20 年すると死が訪れると予言されています。

「ええ。外側と違って、我々はいつそれが起きるか知ることになるでしょう。実際に、我々はみんなこの探検に加わることができて名誉なことだと思っています。有能な銀河艦隊の総員の 27% がこの特別任務に志願しているのをよくご存知でしょう」

— えーと、その一、臨終の苦しみは短いのですか。

「はい。終わりを迎えるときの伸張圧縮を味わう時間は求めてあります。手足の先端から脳に苦痛の信号が伝わる時間よりもずっと短いだろうと思います。地平線の外側のあなた方の中には、このような迅速な終末を望む人が多いのではないでしょうか。」

— この旅行の期間でリラックスするために何かするつもりですか。

「私はゼロ g フットボール（無重力フットボール）のチャンピオンですし、チェスの名人でもあります。私の婚約者もすでにチームの一員として認められています。出発の前には結婚するつもりです。」


この人たちは本当に科学について語っているのか。SF 以外の何ものでもない。ブラックホールの事象の地平線を越えた人は、外側の科学界に観測結果を報告することはできない。よって、地平線の内側で行なわれた測定を報告する可能性を本質的に失う。科学界では、より広い分野の研究者が観測を検証し予測と比較し出版した分析を議論しなければならない。したがって、地平線の内側で行われた観測、そしてそれから導かれた結論は純粋な憶測にすぎない。憶測は科学ではないのだ。


あなたの言っていることは科学の賢明な見地の一つである。その一方で、地平線を越えて自由落下する調査団を結成することは誰にも止められない。十分重いブラックホールに対して、自由落下する調査団には数年の命があり、腕時計の時刻を記録する。信号を受け取り、おそらく、地平線の外の友人からの物資の小包も受け取る。頭上の星々の模様が絶えず変化し続けるのを見る。調査をし、結果を伝え合い、議論し、科学誌を出版し、シュワルツシルト計量に基づく予言の正確さについて意見の一致をみるだろう。このように「内部の科学」には「外側の科学」の持つ本質的な特徴がすべて備わっている。つまり、科学者たちは予測し、検証し、議論および討論し合意する。結果を他の科学者のグループ、つまり外側にいる人たちには伝えられないという事実は「内側の科学」を偏狭なものとするのだが、だからと

いって、これが無効だとは言えない。



ほぉう。調査した記録がブラックホールの中心ですべて破壊され無に帰すならば、それはどんな科学と呼べばよいのか。



予測なんてそんなもんさ。人間の行う科学の出版物の最終的な運命とは所詮そんなものだ。「外側」の文化の記録や科学誌は今後数千年経れば、間違いなく失われたり破壊される。宇宙が収縮し最終的に潰れるという人もいるが、そうなれば記録などもきっと消えてしまうだろう。

まとめよう。我々は地平線が 2 つの調査団を一方通行の膜によって分けることを認識した。外側の人たちはブラックホールの内側の人たちの命の予測を検証することができない。生きて落下する調査団についての理論の予測を実証または反証するためには内側に行かなければならない。

質問 1 「20 年ブラックホール」の質量。 我々の選んだブラックホールの質量は、無限遠で静止状態から出発した突入者が地平線から中心まで 20 年かかるようなものである。

A. 「20 年ブラックホール」の質量の近似値を (i) メートルで (ii) 太陽質量の倍数で (iii) 年で求めよ。

B. 銀河は平均して約 10^{11} 個の太陽のような星からなっている（訳注：銀河にある星は約 10^8 個であり、銀河の質量は太陽質量の約 10^{11} 個分である。銀河の質量のほとんどはダークマターと呼ばれる未知の物質が占めている)。「20 年ブラックホール」は銀河の約何個分の質量になるか。

C. 「20 年ブラックホール」の地平線 $r = 2M$ の値を光年の単位で求めよ。

D. **議論のための問題。** 我々は地平線を越える時刻をどうすれば知ることができるのか。シュワルツシルト半径 $r = 2M$ の値（光年の単位）をどうすれば、$r = 2M$ から中心までの時間を腕時計で測って 20 年以上にすることができるか。

B.2 雨粒系

我々は、推進力のない宇宙船に乗ってブラックホールの中心めがけてまっすぐ飛び込む。もっと簡単にするために、特別な方法で発射された宇宙船に乗る。つまり、それはブラックホールからかなり離れたところで静止状態から落下し始める。我々はこのような自由落下系を**雨粒系**と呼ぶ。地球の雨粒もとても高いところから静止した状態で落下し始めるからである（もっとも地表付近では空気抵抗のため自由落下しなくなるのだが)。雨粒系はかなり大きな高度で静止状態から動き出す。つまり中心から離れたところから動き出し、そこでの時空は平坦である。無限遠で静止状態からまっすぐ落下する局所的な慣性系（動力のない宇宙船）を指して**雨粒**もしくは**ダイバー**と呼ぶ。

雨粒系はすべて局所系であり、相対論的潮汐加速度が宇宙船の計器の精度では検出できないほど小さい時空領域に限られている（第 1 章の 8 節)。異なった雨粒系がたくさん存在し、その各々にはそれぞれ放射状の運動の線があり、半径方向の目盛を通過するごとに

それぞれの時刻が記録される。

雨粒系に加え、他にも局所自由落下系はある。動力のない宇宙船が、ある r の位置で雨粒よりもゆっくり動いているとそれは、地平線の外の半径 r_0 から静止状態で落下してきたものである。我々はこの自由落下系を**しずく系**と呼ぶ。位置 r で雨粒よりも速く動いている動力なしの船は、遠い距離で初期速度 v_{far} で中心に向けて投げられたものである。我々はこれを**雹（ひょう）系**と呼ぶ。雹は雨粒よりも速く落ちるし、当たれば怪我をするからである。しずく系と雹系は、地平線を越えたダイバーに物資を供給しようとしたときに有効である。全体として考えれば、雨粒系（無限遠で静止した状態から落下）としずく系（さまざまな半径から静止した状態から落下）、雹系（無限遠からさまざまな速度で中心をめがけて投下）は中心に向けてまっすぐ落ちる自由落下系を可能な限りすべて網羅する。このプロジェクトでは雨粒系を中心に考える。その結論の中には、すべての自由落下系で正しいものもあるだろう。

102 ページの (3.25) 式から、球殻観測者の時計によって測られる雨粒の速度は

$$\frac{dr_{\text{shell}}}{dt_{\text{shell}}} = -\left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2} \tag{B.1}$$

であった。109 ページの (3.32) 式は、経過固有時 dt_{rain}（例題では $d\tau$ と呼んでいた）に対するシュワルツシルト r 座標の変化 dr の関係を表す式と似た式になる：

$$\frac{dr}{dt_{\text{rain}}} = -\left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2} \tag{B.2}$$

(B.2) 式では座標系が混ざって表されている：t_{rain} と dt_{rain} は雨粒観測者が腕時計を読んだ値で、r と dr はシュワルツシルト r 座標で測った半径である。r 座標は 133 ページのボックスで述べる方法で測定される。

(B.2) 式を図 1 にプロットした。地平線（$r = 2M$）で、この量の大きさ、つまり半径方向の速さは 1 に等しく、普通の意味の光速である。地平線の内側（$r < 2M$）では右辺の量は 1 より大きい。中心（$r = 0$）で、この量は無限大になる。この式は落下する局所的な雨粒系の速さを本当に表しているのだろうか。地平線の内側で、雨粒は本当に「光よりも速く」運動するのか。これらの問題は B.3 節で討論する。

泡立て器時空

ブラックホールの中心で引き裂かれるなんて十分悲惨なことだ。しかもある計算によれば、生きて中心にたどり着くことさえもできないようだ。体を構成する原子は中心から離れたある距離で、破壊的で混沌的な潮汐力によって掻き回される。若いブラックホールに入って行けばこの効果はもっとひどくなる。

オッペンハイマー（J. Robert Oppenheimer）とスナイダー（Hartland Snyder）がブラックホール形成の時間発展の理論を初めて発表したが、そこでは潰れゆく構造が球対称であると仮定した。結果は、ブラックホールは直ちに極めておとなしい最終状態に落ち着くというものだった。オッペンハイマーブラックホールの中心にある特異点に突入者が近づくと、絶えず半径方向に引き伸ばされ、垂直方向に絶えず圧縮される。

実際に潰れる構造のほとんどは球対称ではない。理論ではブラックホールができるとき、地平線の外側の非対称性は即座に — 遠方時間では数秒のうちに— 重力波として放出される。しかし波の一部はブラックホールの地平線の内側へ引きずり込まれる。捕らわれた重力波の海はブラックホールの内側で成長し、特異点の構造に影響を与える。

そこでは何が起きているのだろうか。地平線の内側の状況を記述するどんな理論もそれが真実であるかどうか個人的には確かめたり報告することができない。しかし、理論的にこの部分が欠けているといっても、予測ができないわけではない。アインシュタインの場の方程式にしたがえば、特異点は一種類だけではない。ベリンスキー（Vladimir Belinsky）とハラトニコフ（Isaac Markovich Khalatnikov）、リフシッツ（Evgency Mikhailovich Lifshitz）そして彼らと独立にミスナー（Charles Misner）は非常に奇妙な特異点を見つけた。

彼らの理論によれば、落下する観測者が中心に近づくと、時空は混沌的に振動し、この弱々しい旅行者は電気ミキサーで泡立てられるように、またはカーニバルやキャンディーストアでときどき見られる、一昔前のタフィーマシンで伸ばされるように、ランダムな方向に搾られ引きのばされる（訳注：日本では、縁日で売っている水飴が伸ばされるように）。宇宙飛行士がブラックホールに近づくと、これらの振動の振幅と振動数がともに増加する。ミスナーは**ミックスマスター特異点**と呼んだ。これは、家庭用電気ミキサーの商標名からつけられた（サンビーム社の製品）。どんな圧力にも耐え得るような物体でもミックスマスター特異点では必ずや完全に破壊される。ミックスマスター振動が時間とともに徐々に弱くなるという予測をする基礎的な理論が存在するため、ブラックホールができた後、長い時間飛び込むのを待っていた宇宙飛行士はそれらにお目にかかれないかもしれない。ミックスマスター振動が止む前では、混沌領域にある時空は絶対にシュワルツシルト計量では表せない。

ミックスマスター特異点に加え、アインシュタインの場の方程式は、帯電し自転するブラックホールにだけに存在する２つ目のタイプの特異点も予言する（プロジェクト F を見よ）。この２番目の特異点の種類はポアソン（Eric Poisson）とイスラエル（Werner Israel）によって**質量インフレーション特異点**と呼ばれている。調べた人たちは、この特異点が緩やかでなだらかであるということで一致している。この特異点に近づく物体は無限の長さには引き伸ばされず、この点において、現在進行中の研究でよくみられることだが、意見の一致にはたどり着いていない。理論的に質量インフレーション特異点を平穏に通り抜けられると信じている人もいるし、ある状況のもとで宇宙飛行士は、自転または荷電状態にあるブラックホールを超空間旅行の入口として使えるという人もいる。他にも、質量インフレーション特異点では宇宙飛行士のいろいろなところが直接引き伸ばされるのではなく、光速に等しい相対速度によってバラバラになり、心地よい期待が裏切られるという報告もある。量子重力によって、これらの不一致は解消されるかもしれない。このプロジェクトの終わりの参照文献を見よ。

このプロジェクトで学んでいるブラックホールは帯電してないし、自転もしていないため、そこへ下降する宇宙飛行士が質量インフレーション特異点に出くわすことはないだろう。時空の泡立て器振動も無視し、宇宙飛行士の一団は「時空の天気が晴れた穏やかな」中心に近づく。

質問 2　半径の間の雨粒系時間

A. 半径 r_1 から、それよりも小さい半径 r_2 を通り過ぎるまでの雨粒時間が

$$t_{2\,\mathrm{rain}} - t_{1\,\mathrm{rain}} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{M}\right)^{1/2}\left(r_1^{3/2} - r_2^{3/2}\right) \tag{B.3}$$

であることを示せ。変数が t_{rain}/M と r/M になるように、そして式のどこにも M が単独で現れないように、この式を書き換えよ。腕時計時刻 0 で $r = 5M$ を通り過ぎる雨粒について、典型的な曲線を図 4 にプロットした（これらの半径は 133 ページのボックスに示した方法によって測定される）。

B. 半径 r_1 を無限大にすると、(B.3) 式の経過時間の値はどうなるか。この結果をどう説明すればよいか。

B.3　地平線の内側では光よりも速いのか？ 討論しよう

本当か嘘か：地平線の内側では、雨粒観測者は光速よりも速いか。賛成、反対の両方の立場に分かれて激論しよう。以下の両方の立場に対する概略的な議論にしたがうか、自分独自の立場で論ぜよ。

もちろん、光よりも速い

□賛成派 弁論 1：速さの公式が証明している。

図 1 に、(B.3) 式を使って局所雨粒系に対する雨粒系の速さ dr/dt_{rain} を r/M の関数としてプロットしてある。

$$\frac{dr}{dt_{\mathrm{rain}}} = -\left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2} \tag{B.2}$$

地平線（$r < 2M$）の内側ではこの雨粒の速さは確かに 1 よりも大きな値をとる。つまり光速よりも速い。この弁論で、我々は遂に光のバリアを打ち破ったことを証明した。地平線の内側では雨粒観測者は光よりも速く運動する。

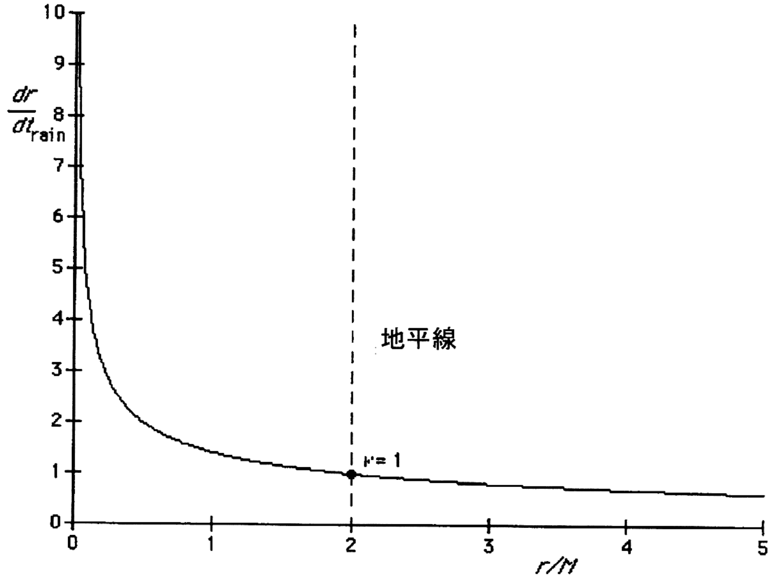


図 **B.1** コンピュータによるプロット：r/M の関数としてプロットした混合座標での dr/dt_{rain} の値、「局所雨粒系の速さ」。この速さは、地平線で **1** に達し、中心 $r = 0$ に近づくにつれて、際限なく増加する。

質問 3 局所雨粒系で測定したときの球殻の間隔。 局所雨粒観測者は中心に向かって落下していくのだが、まだ地平線に達していない。落下中、観測者は近くの球殻間の距離 dr_{rain} を測る。特殊相対論にしたがうと、近くの球殻間の距離が球殻観測者の値よりも $(1 - v^2)^{1/2}$ 倍短くなる。v は落下観測者と局所球殻間の相対速度である（(B.2) 式)。一般相対論にしたがうと、互いに近接する球殻間の測定距離は、公式集の (D) 式による記録係距離 dr よりも長くなる。これらの 2 つの項が打ち消し合い、その結果、$(dr_{\text{rain}}/dr_{\text{shell}})$ $(dr_{\text{shell}}/dr) = dr_{\text{rain}}/dr = 1$ となり、驚くべき結果が得られる：

$$dr_{\text{rain}} = dr \quad \text{物差しの測定} \tag{B.4}$$

上式を示せ。言い替えると、近接する球殻の間隔がシュワルツシルト r 座標における差 dr と等しいことを、落下する雨粒観測者は観測する。ここから dr_{rain} の代わりに dr を使う。

ノート 1：関係式 (B.4) は、雨粒観測者に対してのみ正しいのであって、雨粒観測者よりもゆっくり落下する観測者（「しずく系」）や速く落下する観測者（「雹系」）に対しては正しくない。

ノート 2：(B.4) 式は、どんな観測者によっても長さの測定が正しいように、雨粒系において同時に起きる 2 つの事象の間隔に対してのみ正しい。

地平線の内側での r の測定

地平線の外側では、r の値は、各球殻の円周を測定し 2π で割ることによって決まる（第 2 章の 2.4 節）。ということで r を換算円周と呼ぶ。しかし静止する同心球殻は地平線内には存在しない。

質問： 雨粒観測者は自分の位置の換算円周 r をどうやって測定するのだろうか。**解答：** 円周の一部から決める。

図 2 のシュワルツシルト地図に示したように、地平線の外側で AA′ を通る球殻を 2 つの雨粒が並んで落下する。1 つの雨粒はまっすぐに経路 ABCO を通過し、もう一つはまっすぐに A′B′C′O と進みぶつかる。AA′ をつなぐ円弧を引き、BB′, CC′ も同様にする。中心での角度 AOA′ は BOB′ と相似である。よって、円弧 AA′ と BB′ の長さの比はそれらに対応する円の円周の比と同じになる。式で表すと

$$\frac{(\text{円弧 AA}'\text{の長さ})}{(\text{A を通る球殻の円周})} = \frac{(\text{円弧 BB}'\text{の長さ})}{(\text{B を通る球殻の円周})} \quad \text{(B.5)}$$

となる。A での換算円周を r_A と呼び、B での換算円周を r_B と呼ぶ。すると両辺の分母はそれぞれ $2\pi r_\mathrm{A}$, $2\pi r_\mathrm{B}$ となり、両辺で 2π は打ち消し合う。もし中心でなす角が小さければ、円弧の長さは A と A′ を結ぶ直線とほぼ等しくなる。この距離を AA′ と呼ぼう。そして B と B′ を結ぶ直線距離を BB′ と呼ぼう。等しい角度に対して、(B.5) 式は

$$\frac{\mathrm{AA}'}{r_\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{BB}'}{r_\mathrm{B}} \quad \text{(B.6)}$$

となる。操縦士は、通過する球殻の半径の値を r_A と読み、その瞬間に 2 つの雨粒系の間の距離を AA′ と測定する。そしてその後に、雨粒の間隔を BB′ と測る。この測定値から、そのときの半径 r_B が

$$r_\mathrm{B} \approx \frac{\mathrm{BB}'}{\mathrm{AA}'} r_\mathrm{A} \quad \text{(B.7)}$$

になる。2 点 A, B は地平線の外側にある。どんな半径でも同じ式 (B.7) が成り立つと仮定しよう。地平線よりも小さい半径 r_C でさえも成り立つとする。言い替えれば、落下観測者は C で

$$r_\mathrm{C} \approx \frac{\mathrm{CC}'}{\mathrm{AA}'} r_\mathrm{A} \quad \text{(B.8)}$$

を使って、自分の半径の位置 r_C を測定することができる。雨粒観測者はどうやって AA′ や CC′ の間隔を測定するのだろうか。一つの可能な方法は、図 3 で示したように、単純な物差しを使うことだ。物差しは当然、特異点近くで潮汐力によって砕かれるだろう。別の方法：レーダー測定器は、破砕される寸前でも r の値を測ることができる。

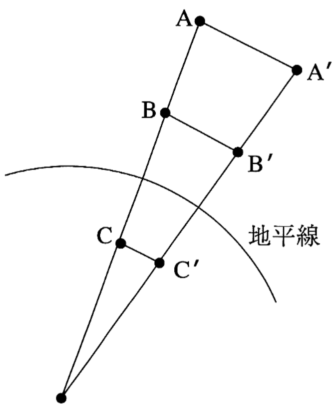


図 B.2 落下する 2 つの雨粒観測者のシュワルツシルト地図。落下する観測者は **AA′, CC′** のような間隔を測定することにより、地平線の内側を通りすぎた後でさえも、自分の半径を導き出すことができる。**B.2** 節で見たしずく系と雹系である。これら別の座標系の一つの観測者はどのような経験をするだろうか。

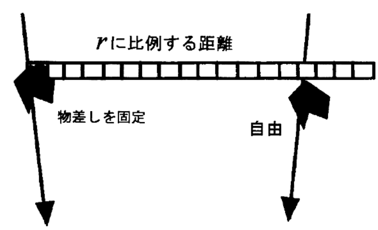


図 B.3 半径方向に沿って内側に自由落下する観測者の換算円周 r を測る装置。**2** つの物体が直線に沿って同じ速さで中心に落下する。物差しをその一つに当て、もう一つの物体の位置に置くことで、物体間の距離を決める。さらに詳しく述べると、装置が地平線の外側で換算円周がわかっている球殻を通り過ぎるとき、初めに物差しを読む。その後の間隔の大きさが換算円周 r に比例すると仮定する。

□賛成派 弁論 2：

質問 4　中心までの腕時計時間が証明している。 雨粒観測者が地平線から中心へ落下するまでの腕時計時間と地平線の半径を比較せよ。2 つの比が 1 よりも大きな平均速度、つまり光速を超えることを示せ。質問 1 の D を思い出せ。

□賛成派 弁論 3：

質問 5　地平線の内側では雨粒は地平線における速さよりも大きくならなければならない。

A. 限界の場合として、地平線における雨粒観測者の速度 $dr_{\mathrm{shell}}/dt_{\mathrm{shell}}$ の球殻観測者の観測値を求めよ。

B. 落下観測者が測定すると、最後に通り過ぎることになる地平線（極限的な場合）の球殻がどんな速さで運動するか。

C. (B.2) 式は B の結果と一致し、落下する観測者の速さは確かに大きくなっていく。したがって、地平線の内側では ...

いや、光よりも遅い

□反対派 弁論 1：

局所雨粒観測者は光が $v = 1$ で動いていることを観測する。

局所雨粒系は自由浮遊系である。このような系で測定すると、光はよく言われているような速さで運動する：時間のメートル当たり 1 メートル。雨粒観測者は、下方に運動する光が、地平線を通りすぎた後でも通常の光速で通り過ぎていくのを観測する。光は雨粒系を通り過ぎることになるので、局所雨粒系が「光よりも速い」と言うのはバカげている。

空想の才能

私自身と私の思考法について吟味すると、私にとって空想の才能は、知識を吸収する才能よりも大きな意味があったという結論になる。

— アインシュタイン

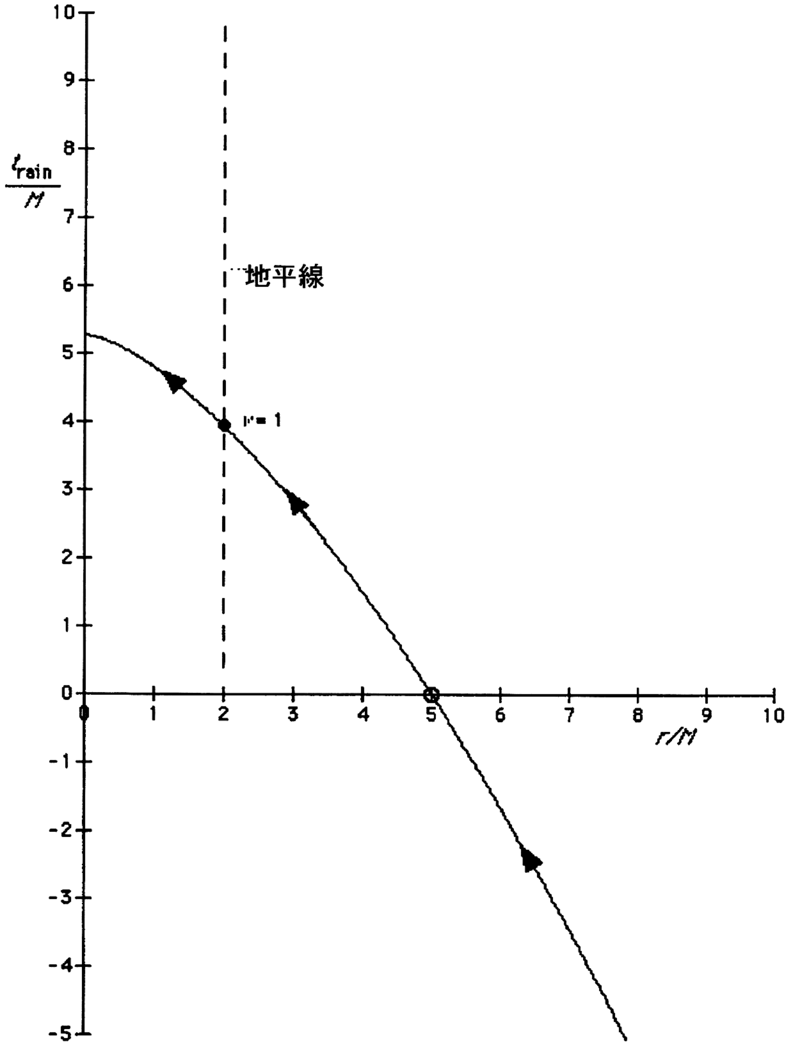


図 B.4　コンピュータによるプロット。雨粒観測者（無限遠で静止状態から落下する）の r の世界線に対する t_{rain}。雨粒時刻のゼロは任意に落下観測者と $r=5M$（水平軸の白丸）の球殻の間が一致したときに設定される。時刻 0 は、形を変えることなく曲線をグラフ上で上下に動かすことによって任意に設定できる。

□反対派 弁論 2：

質問 6　光の「固有速度」は無限大。(B.2) 式の $dr/dt_{\rm rain}$ は、普通の座標速度ではない。分子は御覧のとおり、シュワルツシルト r 座標の変化 dr である。しかし分母は、落下する雨粒の固有時（腕時計）である。この比は平坦時空の特殊相対論の複製である。特殊相対論の場合を以下で探ってみよう：

A. ブラックホールと一般相対論を忘れて、平坦時空に目を向けよう。推進力のない宇宙船があり、地球系で測定した速度 dr/dt で運動している。それに乗って地球から α センタウリへ旅行することを考えよう。α センタウリは地球から 4 光年にある。それでは、地球系時間 dt から、宇宙船の腕時計で記録する固有時 $d\tau$ に変換しよう。つまり、速さ dx/dt から $dx/d\tau$ の測定に切替えよう。宇宙船は地球と α センタウリの間の固有距離（地球系で測定する距離）を固有時（地球からの出発と α センタウリの到着が同じ場所で起きる宇宙船系で測定した時間）で旅するので、$dx/d\tau$ を**固有速さ**という。固有速さ $dx/d\tau$ を地球系の速さ dx/dt で表せ。

B. ずうっと大きな地球系速さ dx/dt で宇宙船で地球から α センタウリへの旅行を繰り返そう。地球系の速さ dx/dt をどのようにすれば、固有速さ $dx/d\tau$ は 1 になるか。

C. 宇宙船の地球系速さ dx/dt がさらに増加し、光速に近づくと固有速さ $dx/d\tau$ はどんな値に近づくか。

D. 高速の極限として、平坦時空における「光の固有速さ」はいくらか。

E. それでは (B.2) 式の局所雨粒系の速さに戻ろう。ここでも時間の増分 $dt_{\rm rain}$ は、落下する雨粒の腕時計の読みである固有時 $d\tau$ と等しい。地平線の内側でさえも固有速さ $dr/dt_{\rm rain}$ は限られた場合の「光の固有速さ」よりも小さいことを証明し結論づけよ。その二つが同じ値になる場所が地平線の内側のどこにあるのか。地平線の内側にそのような位置は 1 つ以上あるか。

議論： この討論に決着を着ける一つの方法は、地平線の内側で速度が測られる状況とふつうに速度を定義できる状態との間に差があることを確認することだ。これらの状況の差はあまりに大きいため、速度についてのふつうの考えを超越してしまっている。しかしながら、地平線の内側でさえも、以下の質問で述べられるように、少なくとも 1 つの基本的な観測は正しいのかもしれない。

質問 7　ディベートした人たちは同意に達したか。 このディベートの賛成派と反対派は以下の文章について何を言わなければならなかったか。光速よりも速く運動する物体を直接測定する局所観測者はいない。両派はそれが正しいということに同意するか、それとも同意しないか。途中の半径で静止状態から落下した観測者に対して、この文章は正しいか。遠い距離からブラックホールめがけて、速度を持って出発した観測者に対してはどうか。

B.4 雨粒系の計量

これまで、我々はたった一つの雨粒観測者のすぐ近くで起きた事象のみを調べてきた。この近傍で、時計付きの格子からなる局所自由浮遊系を、限定的だが、構成することができる。そこで、我々は遠い星からの光の運動と、観測者のために投げ入れられる荷物の運動について述べたい。これらの軌跡は時空に大きく広がっている。これらを記述するためには大域的な座標系が必要だ。

地平線の外側の領域に対して、大域的な座標系としてもともとシュワルツシルト計量の記録係系 r, ϕ, t がある。地平線の内側で、r と ϕ はまだ測定できるのだが、もはや t は使えない。事象の報告がもはや遠い記録係に届かないためだ。そこで、落下する雨粒観測者の腕時計で測る時間 $t_{\rm rain}$ を使う。地平線の外側で雨粒系で同時に起きた事象の組に対して $dr = dr_{\rm rain}$ であり、dr は雨粒観測者に対する半径方向の増分の便利な測定量であるということを質問 3 で示した。この関係も地平線の内側で正しいと仮定する。

138 ページのボックスで $r, \phi, t_{\rm rain}$ 座標系の計量を導びく。この計量は地平線の内外でともに正しい。これまで通り計量を使うと、シュワルツシルトブラックホール近くの時空の（非量子論的な）性質について、その近傍の粒子とフラッシュ光の運動に可能な限りすべての疑問に答えることができる。この形の計量で、外側から内側へ、そして $r = 0$ へ（ほとんど）すべての行程で、分析をとぎれなく滑らかに行うことができる。

質問 8　雨粒系で平坦空間？ $dt_{\rm rain} = 0$ とし、計量 (B.15) の空間部分がユークリッド幾何学から期待されるものであることを示せ。すなわち、空間部分は局所的に平坦である。この結果に驚いただろうか。シュワルツシルトの記述では、$dr_{\rm shell}$ は地平線の外側の dr よりも大きい（ボックスの (D) 式）。局所的雨粒系の計量の中の dr^2 の項に同じような伸びがないのはなぜか。

雨粒系の計量

$r,\ \phi,\ t_{\rm rain}$ 座標系の計量を手に入れたい。地平線の外側の事象に対して飛躍を 2 回する：記録係系から球殻系へ、そして球殻系から雨粒系へ。得られる計量は地平線の外側と同様に内側でも正しいと仮定しよう。記録係系から球殻系への変換はこの本の終わりの公式集の (C) 式と (D) 式

$$dr_{\rm shell} = \frac{dr}{\left(1-\dfrac{2M}{r}\right)^{1/2}} \qquad \text{(C)}$$

$$dt_{\rm shell} = \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{1/2} dt \qquad \text{(D)}$$

によって与えられる。球殻系から雨粒系に移行するために、特殊相対論のローレンツ変換をする。「ロケット系」を雨粒系に選び、「実験室系」を球殻系に選ぼう。微分のローレンツ変換 (*Spacetime Physics* の 103 ページ) を x 軸方向の運動として表わす。この場合、 x 軸は中心に落下する方向である：

$$dt_{\rm rain} = -v_{\rm rel}\gamma dr_{\rm shell} + \gamma dt_{\rm shell} \qquad \text{(B.9)}$$

(C) 式と (D) 式をローレンツ変換 (B.9) に代入すると

$$dt_{\rm rain} = -\frac{v_{\rm rel}\gamma dr}{(1-2M/r)^{1/2}} + \gamma(1-2M/r)^{1/2}dt \qquad \text{(B.10)}$$

となる。dt について解くと

$$dt = \frac{dt_{\rm rain}}{\gamma(1-2M/r)^{1/2}} + \frac{v_{\rm rel}dr}{(1-2M/r)} \qquad \text{(B.11)}$$

となる。129 ページの (B.1) 式から $v_{\rm rel}$ を伸びの因子 γ へ代入する：

$$v_{\rm rel} = -\left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2} \qquad \text{(B.12)}$$

$$\gamma \equiv \frac{1}{(1-v_{\rm rel}^2)^{1/2}} = \frac{1}{\left(1-\dfrac{2M}{r}\right)^{1/2}} \qquad \text{(B.13)}$$

(B.12) 式と (B.13) 式を (B.11) 式に代入すると

$$dt = dt_{\rm rain} - \frac{(2M/r)^{1/2}dr}{1-\dfrac{2M}{r}} \qquad \text{(B.14)}$$

が得られる。シュワルツシルト計量はこの本の終わりの公式集の (A) 式

$$d\tau^2 = \left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 - \frac{dr^2}{1-\dfrac{2M}{r}} - r^2d\phi^2 \qquad \text{(A)}$$

である。(B.14) 式をシュワルツシルト計量に代入し、整理すると、大域的な雨粒系 r と $\phi,\ t_{\rm rain}$ が得られる：

$$d\tau^2 = \left(1-\frac{2M}{r}\right)dt_{\rm rain}^2 - 2\left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2}dt_{\rm rain}dr - dr^2 - r^2d\phi^2 \qquad \text{(B.15)}$$

この計量は地平線の内側だけでなく、回転しないブラックホールの周りでどこでも使うことができる。$r = 2M$ で発散しない形で計量を書けるということは、落下者が地平線を通り過ぎるとき、引っ張られる感じも揺らされる感じもしないことを意味している。

B.5 地平線の内側への一方通行

なぜブラックホールから脱出できないのか？ 地平線の内側への旅行が中心への一方通行になってしまうのは避けられないものか？ この節では、特殊な落下をする飛行士「雨粒観測者」の視点からこの疑問について考えることにする。だが基本的な結論は地平線の内側の旅行者すべてについて正しい。地平線の内側では、半径rはどんなことがあっても減少する。

雨粒観測系は局所自由浮遊慣性系である。どんな慣性系でもそうであるように、物体やメッセージは光よりも速く進んだり戻ったりすることはできない。通過する粒子の世界線は、未来を向いた**前光円錐**の中になければならず、半径方向の内外のどちらにも光よりも速く運動できない。以下では、雨粒系を運動する光の局所世界線を追跡する。

予告編：雨粒観測者が光のパルスを中心とその逆方向に向けて発光する。地平線の内側では、前方に放った光も後方に放った光もともに内側に運動することがわかるだろう。したがって前方または後方に撃った粒子（必然的に光よりも小さな速さ）もすべて内側に運動しなければならない。これらのことがらは重要である。地平線が存在するという唯一の正しい証明が、世界線が外側でなく内側にのみ進めることを示すことなのだから。

質問 9 雨粒系での光円錐

A. 以下の右辺を展開をして、雨粒系の計量 (B.15) 式と等しいことを示せ：

$$d\tau^2 = -\left[dr + \left(1 + \sqrt{\frac{2M}{r}}\right) dt_{\text{rain}}\right]\left[dr - \left(1 - \sqrt{\frac{2M}{r}}\right) dt_{\text{rain}}\right] - r^2 d\phi^2 \qquad \text{(B.16)}$$

B. 放射状（$d\phi = 0$）に運動する光（$d\tau = 0$）に対して、(B.16) 式が 2 つの解をもち、その一つが内側に発光する「ヘッドライト」で、もう一つが外側に発光する「テールライト」であることを示せ。

C. ヘッドライトとテールライトに対する速度が

$$\frac{dr}{dt_{\text{rain}}} = -\left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2} \pm 1 \qquad \boxed{光} \quad \text{(B.17)}$$

によってまとめられることを示せ。

D. 地平線の内側（$r < 2M$）で (B.17) 式が雨粒系の背後に放たれるテールライトでさえも内側に向かって進むことを示せ。

E. 一旦 雨粒観測者が地平線を横切ってしまうと、雨粒から発射されたどんなものでも、相対速度が雨粒観測者に対してどうなっていようとも、必然的に内側に運動するという議論を納得するまで行え。

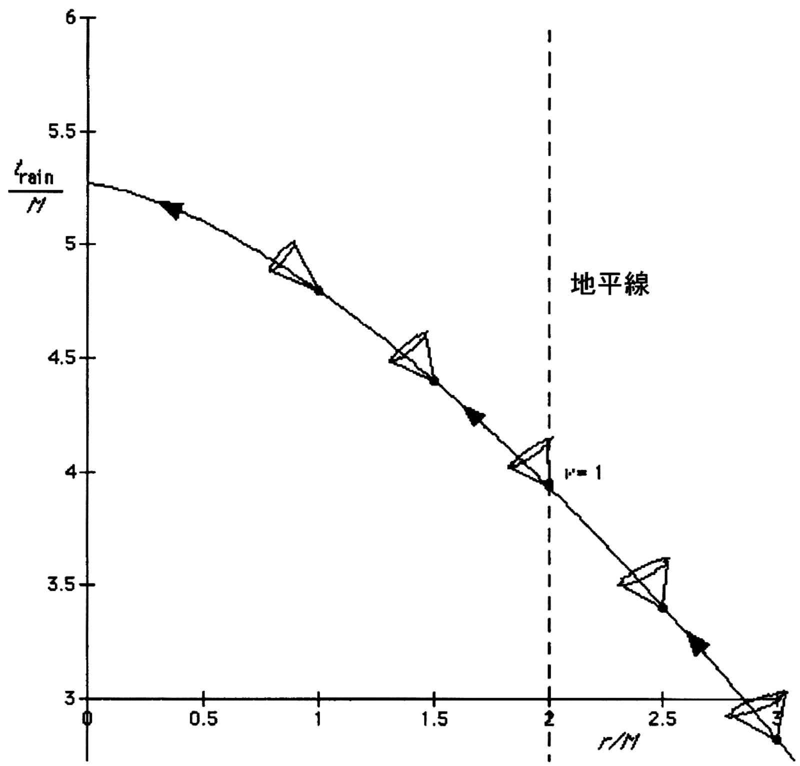


図 **B.5** コンピュータプロット：ブラックホールの地平線を内側に通り過ぎるときのフラッシュを放つ雨粒の世界線。鏃は世界線上の雨粒の運動の方向を表している。小さい円錐は、世界線に沿ってフラッシュ放出時から全ての方向に広がる光を表している。各点から伸びている下の線は内側に送られるフラッシュの運動を表している（(**B.17**) 式で負の符号を選んだ場合)。線上の部分は真上に送られるフラッシュの運動を表している（(**B.17**) 式で正の符号を選んだ場合)。地平線の内側では、半径方向の外側に向けて放たれたフラッシュでさえも内側の中心へ進む。この図はこれらのフラッシュの初期の運動のみを表していることに注意する。光の全軌道の例として、**144** ページの図 **7** を見よ。

図5は地平線の内側と外側の発射直後の光円錐を表している。これらの光円錐は内側と「外側」に向かう光のフラッシュの初期運動だけを示している。以降の節で、これらのフラッシュの発光後のある時間までの振舞いを追跡することにする。

質問 10　地平線上と外側でのテールライトの初期運動。
雨粒観測者が内側に落下しているとき、後方から発光されるテールライトが以下の各速度で外側に進むときの雨粒観測者の位置 r/M を求めよ。

A. $dr/dt_{\mathrm{rain}} = 0.99$
B. $dr/dt_{\mathrm{rain}} = 0.9$
C. $dr/dt_{\mathrm{rain}} = 0.5$
D. $dr/dt_{\mathrm{rain}} = 0$

質問 11　地平線の内側でのテールライトの初期運動。 雨粒観測者が内側に落下しているとき、後方から発光されるテールライトが実際に以下の各速度で外側に進むときの雨粒観測者の位置 r/M を求めよ。

E. $dr/dt_{\mathrm{rain}} = -0.1$
F. $dr/dt_{\mathrm{rain}} = -0.5$
G. $dr/dt_{\mathrm{rain}} = -1$
H. $dr/dt_{\mathrm{rain}} = -9$

質問 12　ヘッドライトの初期運動。 質問 10 と 11 で求めた 8 つの r/M の値に対し、これらの位置において内側に向いたヘッドライトの速度 dr/dt_{rain} を求めよ。

B.6　光の半径方向の軌跡

あなたの仕事は臨時のラジオニュース速報を落下観測者たちに配信することだ。これらの速報では、地平線の外側から最近のニュースと科学レポートを伝えるのだが、地平線の外側に固定された基地から中心に向けて放送される。

この仕事を準備するために、地平線の外側の半径 r_1 から内側の半径 r_2 へ光が進むのにかかる時間を知りたい。そして、時計は地平線の内側で静止することができないので、雨粒系時間 t_{rain} でどれだけかかるか測定することを選んだ。これからの質問はむしろ技術的なものである。単に実行するだけかもしれない（そうするように教えられるかもしれない）し、結果だけを使うだけかもしれない。この質問とこのプロジェクトの残りの多くのところで、次元（単位）のない変数を使う。解析しやすくするためだけでなく、結果を対象としているブラックホールの質量 M と独立にするためでもある。半径 r と時刻 t の

領域すべてに対して、無次元量

$$r^* \equiv \frac{r}{M} \quad \text{および} \quad t^* \equiv \frac{t}{M} \tag{B.18}$$

を定義する。

質問 13 光が半径 r_1 から r_2 に進むまでにかかる雨粒系時間。下に進む光または電波に対して

$$dt^*_{\rm rain} = \frac{-dr^*}{\left(\dfrac{2}{r^*}\right)^{1/2} + 1} = \frac{-r^{*1/2}dr^*}{\sqrt{2} + r^{*1/2}} \quad \boxed{\text{光}} \tag{B.19}$$

となるように、質問 9 の (B.17) 式を書き直せ（「外側」に向けて送ったフラッシュでは、(B.19) 式の分母の符号が負になる）。

$$u = \sqrt{2} + r^{*1/2} \tag{B.20}$$

を代入し、u_1 から u_2 まで積分し $\ln A - \ln B = \ln(A/B)$ を使い、(B.20) 式を再度代入せよ。r_1^* から r_2^* まで移動する信号に対して、積分された雨粒系時間が

$$t^*_{\rm r2\ rain} - t^*_{\rm r1\ rain} = (r_1^* - r_2^*) - 2\sqrt{2}\left(r_1^{*1/2} - r_2^{*1/2}\right) + 4\ln\left(\frac{\sqrt{2} + r_1^{*1/2}}{\sqrt{2} + r_2^{*1/2}}\right) \quad \boxed{\text{ヘッドライト}} \tag{B.21}$$

となることを示せ。

ごちゃごちゃしすぎ？ そう、でもコンピュータにとって結果をプロットするのは何でもないことだ。

質問 14 光の地平線破砕雨粒系時間。 $r_2^* = r_1^*$ のとき、経過雨粒系時間がゼロであることを確かめよ。なぜゼロなのか。r_1^* が地平線、$r_2^* = 0$（破砕点）のとき、雨粒系経過時間が $t^*_{\rm rain} = 0.773$ または $t_{\rm rain} = 0.773M$ であることを示せ。この結果を、109 ページのボックスで得られた雨粒系落下観測者自身の地平線破砕腕時計時間 $\tau = (4/3)\ M$ と比べよ。(B.21) 式を使った結果がなぜ雨粒系観測者自身の結果よりも小さくなるのか。

(B.21) 式から得られる曲線をコンピュータを使って図 6 にいくつか描いた。各々の曲線に対して r_1^* を選び、$t^*_{\rm r1\ rain} = 0$ とせよ。そして r_2^* として一連の小さい値を選び、コンピュータに $t^*_{\rm r2\ rain}$ を計算させ、結果をプロットせよ。比較のため、雨粒系観測者の世界線を表す曲線も描いておいた。図 6 から、ニュース速報が落下する共同体に追い着く時間を求めることができる。

落下する観測者がまっすぐ外側に向けて発射したフラッシュ光についてはどうか。もし観測者が地平線を越える前に発射されていれば、外に向けたフラッシュは実際に外に向かって運動する。観測者が一旦 地平線を越えてしまうと「外向き」のフラッシュでさえも

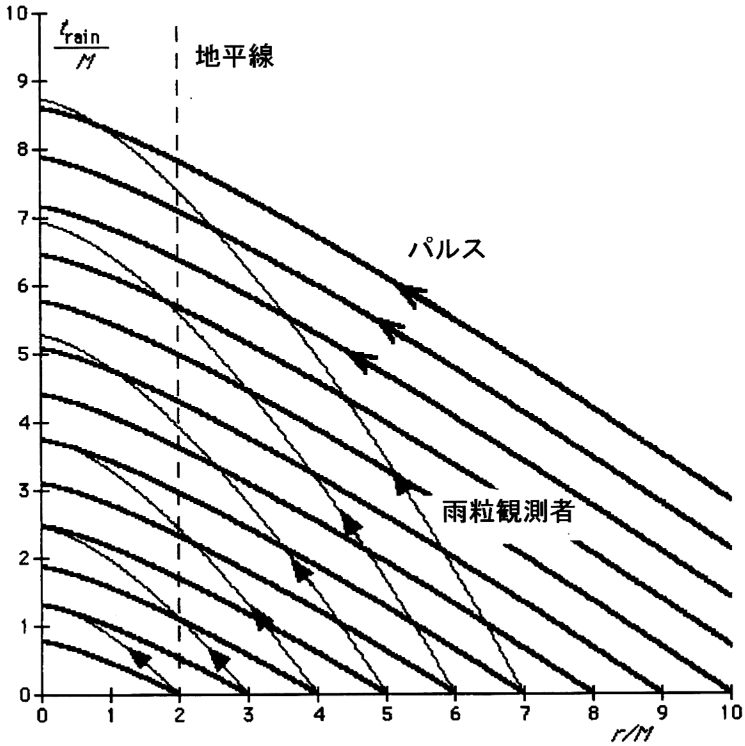


図 B.6　コンピュータプロット：「雨粒落下者」の世界線（細い線）と内側向きのフラッシュ（太い線）。雨粒観測者の世界線はすべて同じ形であり、形を変えることなく上から下に動かすと重なる。光のフラッシュの世界線についても同じことがいえる。r/M の値に対して、光のパルスは雨粒観測者よりも単位時間当たり多くの距離を覆っている。この結果から光または電波が地平線の遠くから地平線の内部の落下者とコミュニケーションをとるために使えることは明らかである。

内側へ進む。図 5 の世界線上に芽生えた小さな光円錐は、地平線の内側で発光された内向きと「外向き」のフラッシュの運動を示している。発射された光のより完全に近い世界線を図 7 に示した。(B.19) 式の右辺の分母にある第二項の前の符号を負に置き換え、積分することにより、「外向き」のフラッシュの世界線を追跡することができる。地平線の内側（r_1^* はいつも r_2^* より大きい）における便利な形をした解は

$$t^*_{\mathrm{r2\ rain}}-t^*_{\mathrm{r1\ rain}}=-(r_1^*-r_2^*)-2\sqrt{2}\left(r_1^{*1/2}-r_2^{*1/2}\right)+4\ln\left(\frac{\sqrt{2}-r_2^{*1/2}}{\sqrt{2}-r_1^{*1/2}}\right) \quad \boxed{\text{テールライト}} \tag{B.22}$$

である。

図 7 の発光点 A に到達した落下観測者は影の領域にある未来の事象にのみ影響を与えることができる。時間が経てば経つほど、つまり落下観測者の到達する半径が小さいほど、観測者が影響を与えることのできる事象領域は小さくなる。ロケットの推進力を無限に大きくしても、影の領域以内のどれかの事象になる。実際「外向き」のフラッシュの世界線は、不可避世界線と呼べるかもしれない。事象 A から出発した雨粒観測者に対して、宇宙に存在するどんな力を使ってもこの曲線の上限を越えて消失を先延ばしにすることはできないからだ。

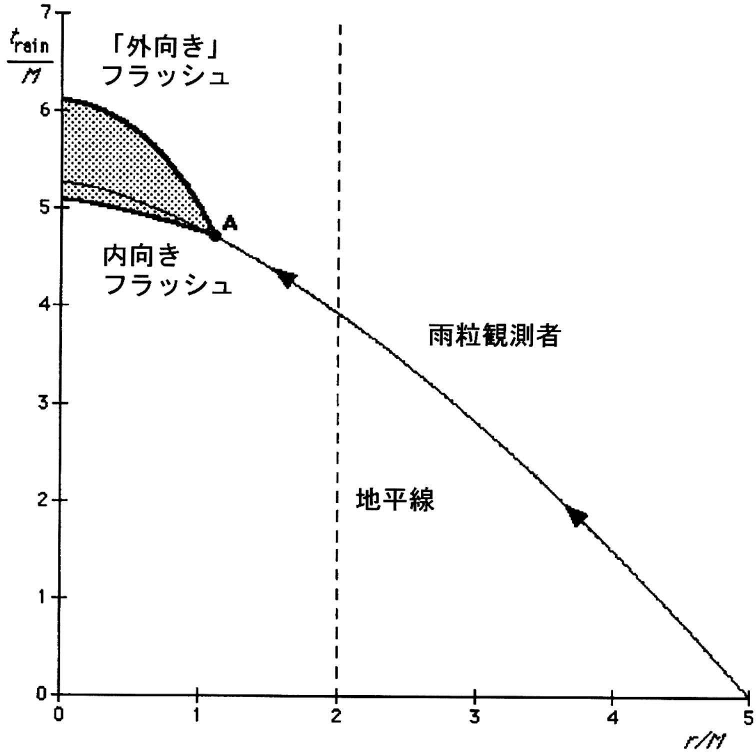


図 B.7　コンピュータプロット。細い線：$t_{\mathrm{rain}} = 0$ で $r = 5M$ を通過し、地平線内の事象 A でのヘッドライトとテールライトを発光する雨粒観測者に対する世界線。太い線：これら内向きと「外向き」に発光されるフラッシュの世界線。ともに内側に進んでいる。影の領域には、事象 A を通りすぎた後に、まだ落下者が未来に影響を及ぼすことができる事象が存在する。

B.7　慈悲深い終焉？

ブラックホールに落ち込むことは自殺の一形態であり、宗教的、道徳的、倫理的原理に背くことになるかもしれない。これらの思慮とは別にこの破砕点における死が悲痛極まりないことを知れば、ブラックホールへ落下する調査を買って出る者は誰もいなくなるだろう。これから我々のすることは、最初の不愉快感から中心の破砕点 $r=0$ までの落下者の腕時計上の経過時間として定義される**イタイ時間** τ_{ouch} を評価することである。

質問 15　予備段階：幾何学単位での加速度 g。 第 3 章の練習問題 9 の A をまず実行し、地上での加速度がニュートン力学で幾何学単位を使うと以下になることを示せ：

$$g_{\text{Earth}} = g_{\text{E}} = \frac{M}{r_{\text{E}}^2} \qquad \boxed{\text{ニュートン}} \quad \text{(B.23)}$$

地上での重力加速度 g_{E} が幾何学単位で以下の近似値になることを示せ：

$$g_{\text{Earth}} = g_{\text{E}} \approx 10^{-16}\,\text{メートル}^{-1} \qquad \boxed{\text{ニュートン}} \quad \text{(B.24)}$$

質問 16　雨粒系での加速度。 $dt_{\text{rain}} = d\tau$ とし、(B.2) 式から出発しよう：

$$\frac{dr}{d\tau} = -\left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2} \quad \text{(B.25)}$$

これを腕時計時間 τ で微分し、混合座標系 r,τ で雨粒観測者の加速度を求めよ。結果がニュートンの場合（固有時をニュートンの絶対時間で置き換えたもの）と同じ式

$$g_{\text{rain}} \equiv \frac{d^2r}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\frac{(2M)^{1/2}}{r^{3/2}}\frac{dr}{d\tau} = -\frac{M}{r^2} \quad \text{(B.26)}$$

になることを示せ。ここで最後の等号で (B.25) 式を使った。

質問 17　雨粒系での相対潮汐加速度。 この初期加速度が、落下する雨粒観測者の頭と爪先の間でどれくらい違うのか知りたい。(B.26) 式の g_{rain} を r で微分することから始めよう。次を示せ：

$$dg_{\text{rain}} = \frac{2M}{r^3}dr \quad \text{(B.27)}$$

質問 3 で（雨粒系だけに対して）雨粒観測者が測ると、球殻の間隔がシュワルツシルト r 座標と同じ dr であることを示した。結果として、落下観測者の頭と爪先の間隔が雨粒系で、r の間隔 dr と同じ値 dr_{rain} であることになる。よって (B.27) 式を使って、雨粒

観測者の頭と爪先の間の加速度の差を求めることができる。差を大きく見積もって2メートルとする。でも、打ち消し合いが起きるのを期待して最後まで数値を代入するのを待っておこう。

不快感に対する条件は何か。落下者が最初に不快に感じるのは、頭と爪先の局所的な加速度の差が地上での加速度と等しくなったときだと仮定しよう。言い替えれば、お腹が自由浮遊ならば、爪先は地上での体重の半分で下に引っ張られ、頭は体重の半分で上に引っ張られ、頭と爪先の加速度の差が地上の重力加速度と等しくなるときである。

質問 18 「イタイ」の始まり。 式で表すとイタイは

$$dg_{\text{rain ouch}} \equiv g_{\text{E}} \tag{B.28}$$

のとき、つまり

$$r_{\text{ouch}} = \left(\frac{2M\,dr}{g_{\text{E}}}\right)^{1/3} \tag{B.29}$$

に起きることを示せ。

質問 19 「イタイ」の r 値。 イタイ半径 (B.29) を地平線の r 値 $r = 2M$ と比べよ。以下の場合について比 $r_{\text{ouch}}/2M$ を求めよ。

A. 太陽質量の 10 倍のブラックホール

B. このプロジェクトで採用している「20 年ブラックホール」

C. イタイ半径が地平線に等しいとすると、ブラックホールの質量は太陽質量の何倍になるか。

質問 20 イタイ時間 τ_{ouch}

A. イタイ時間（落下者が不快に感じる全時間）がブラックホールの質量と無関係に

$$\tau_{\text{ouch}} = \frac{2}{3}\left(\frac{dr}{g_{\text{E}}}\right)^{1/2} \tag{B.30}$$

となることを示せ。ここで dr が宇宙飛行士の背の高さ、約 2 メートルであり、g_{E} = 地上の重力加速度 $= 10^{-16}$ メートル$^{-1}$ であることを思い出せ。

B. イタイ時間 τ_{ouch} を秒で計算せよ。シュワルツシルトブラックホールすべてに対して同じ値になる。

質問 21 慈悲深い終焉。 痛みの信号は約 1 メートル毎秒で神経を伝わると医者は言う。ブラックホールの中心における死の慈悲深い性質について結論を下せ。

B.8　地平線の内側での粒子の軌跡

注意: B.8–B.10 節は第 4 章と第 5 章の内容と大きく関連している。これらの章を終えた後以下の節に戻ってもよい。

雨粒計量 (B.15) から始め、第 3 章から第 5 章の方法を使って、石と光の軌跡の分析を進めることができる。

質問 22　エネルギー 第 3 章の 3.3 節のステップにしたがい、雨粒計量を使って、雨粒系における石の単位質量当たりのエネルギーを導出せよ。その結果、運動の定数が

$$\frac{E_{\text{rain}}}{m} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{dt_{\text{rain}}}{d\tau} - \left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2}\frac{dr}{d\tau} \qquad \boxed{m > 0} \quad \text{(B.31)}$$

であることを示せ。ここで $d\tau$ は運動する石の腕時計時間である。

質問 23　角運動量。 第 4 章の 4.2 節のステップにしたがうが、しかし再び雨粒計量を使い、石の 2 番目の運動の定数として、単位質量当たりの角運動量を求めよ。結果がシュワルツシルト計量と厳密に同じものであることを示せ：

$$\frac{L}{m} = r^2\frac{d\phi}{d\tau} \qquad \boxed{m > 0} \quad \text{(B.32)}$$

粒子と光の軌跡を地平線の内外で r と t_{rain}, ϕ を使って記述し続けることができる。その導出は第 4 章と第 5 章で行ったものと同じようにできるのだが、エネルギーの式の右辺に第二項があるために複雑になる。同じような代数的な方法を使うよりも、落下する雨粒観測者が破砕点 $r = 0$ に近づくときに目の当りにするものに注目しよう。

B.9　最後の眺め

破砕点に近づくにつれて、雨粒落下者の見る夜空はどうなるのか。我々は今この質問に答えられる新たな道具を手にした。

地平線の外側で、雨粒落下者の球殻速度は (B.1) 式である：

$$\frac{dr_{\text{shell}}}{dt_{\text{shell}}} = v_{\text{shell}} = -\left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2} \qquad \text{(B.33)}$$

球殻と雨粒観測者がフラッシュを見るために目を向ける角度 ψ とエネルギーの関係は 230 ページの (5.44) 式と (5.45) 式である。この章における記法を使うと

$$\cos\psi_{\text{rain}} = \frac{\cos\psi_{\text{shell}} + v_{\text{rel}}}{1 + v_{\text{rel}}\cos\psi_{\text{shell}}} \qquad \boxed{\text{光}} \quad \text{(B.34)}$$

$$E_{\text{rain}} = \frac{E_{\text{shell}}(1 + v_{\text{rel}} \cos\psi_{\text{shell}})}{(1 - v_{\text{rel}}^2)^{1/2}} \qquad \boxed{\text{光}} \quad \text{(B.35)}$$

となる。ここで、雨粒落下者はロケット系の代わりであり、球殻は実験室系となり、v_{rel} は実験室系に対するロケットの速度である。角度 ψ は実験室系のロケット運動の方向を基準として測定される。そして特殊相対論の書き方にしたがって、雨粒観測者が中心を向くと角度 ψ はゼロになり、中心を向くと v_{rel} は正になる。別の表現では

$$v_{\text{rel}} = -v_{\text{shell}} = \left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2} \qquad \text{(B.36)}$$

となる。ここでブラックホールから離れた位置におけるフラッシュ光のエネルギー E_{far} と球殻観測者の測ったエネルギー E_{shell} の関係は 104 ページの (3.28) 式または第 5 章の練習問題 6 から

$$E_{\text{far}} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} E_{\text{shell}} \qquad \boxed{\text{あらゆる物体}} \quad \text{(B.37)}$$

である。

(B.37) 式はブラックホールに向かうかまたは離れるあらゆる物体に対して正しい。さらに半径方向だけでなくあらゆる方向に運動する光（またはあらゆる物体）に対しても正しい。(これら 2 つの主張の証明は追加の質問になる：もし正しくなければ、少なくとも地平線の外側で永久機関ができてしまうことを示せ)

最後になるが、球殻観測者がフラッシュに目を向ける角度 ψ_{shell} とフラッシュの衝突パラメータ b の間には関係がある（衝突パラメータ b は第 5 章の図 2 で定義される）。(B.17) 式と第 5 章の図 3 から、(B.34) 式と (B.35) 式の $\cos\psi_{\text{shell}}$ を求める。光が進む方向と光を見るために向く方向の間には 180° の差があるため、コサインの符号は負である。見る方向（中心に向けまっすぐ見ると角度 ψ はゼロ）に対して

$$\cos\psi_{\text{shell}} = -\left[1 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{b^2}{r^2}\right]^{1/2} \qquad \text{(B.38)}$$

となる。

さて、$r = 0$ の破砕点にたどり着く直前、雨粒観測者の眺めを決めるために、これまで求めてきた式を使いたい。上の式を使って変形し、そしてその結果が地平線内の運動にも使えると仮定する。注意：$b = 0$ の衝突パラメータに対して、正確に半径方向にある星に対して、(B.38) 式から、すべての半径の球殻観測者はこの星を外向きの半径方向に見ることがわかる。この結果を前方に進んでいるものにもそのまま適用することができるため、落下者の真上にある星は真上にあると観測されるだろう。以下の分析はすべての方向にある星に成り立つ。

質問 24 空のリング。 (B.38) 式と (B.36) 式を (B.34) 式に代入し、$r \to 0$ の極限をとることから始めよう。初めに、分母に r のある項だけ残し、すべての項を無視する（なぜなら、分母に r を含む項は $r \to 0$ で他のすべての項よりもずっと大きくなるためである）。この最初のステップの結果が

$$\cos\psi_{\text{rain}} \to \frac{-\left(\dfrac{2M}{r}\right)^{1/2}\dfrac{b}{r} + \left(\dfrac{2M}{r}\right)^{1/2}}{-\dfrac{2Mb}{r^2}} \qquad \boxed{r \to 0} \quad \text{(B.39)}$$

となることを示せ。

次に (B.39) 式の右辺の分子において、最初の項だけを残せ（最初の項は極限に近づくにつれて最も大きな値になるためだ）。その結果が

$$\cos\psi_{\text{rain}} \to \frac{\left(\dfrac{2M}{r}\right)^{1/2}\dfrac{b}{r}}{\dfrac{2Mb}{r^2}} \to \left(\frac{r}{2M}\right)^{1/2} \qquad \boxed{r \to 0} \quad \text{(B.40)}$$

となることを示せ。

(B.40) 式から、落下者が破砕点に近づくと（$r \to 0$）星を見が見える方向のコサインは 0 になり、見る角度は 90 度になる。見える角度が90度であることは衝突パラメータには依存しない 。したがって、全ての星は90度の方向に見える（外向き半径方向、つまり真上にある星は除く）。よって、運動の方向を横切る「空を取り巻くリング」の中に全ての星が見える。

最後の瞬間に落下者が見る光のエネルギーはどうなるのだろうか。

質問 25 最後の眺めの光のエネルギー。
(B.36) 式と (B.37) 式、(B.38) 式を (B.35) 式に代入し、質問 24 で行ったのと同じように r が小さいという極限をとれ。結果が

$$E_{\text{rain}} \to \frac{b}{r}E_{\text{far}} \qquad \boxed{r \to 0} \quad \text{(B.41)}$$

となることを示せ。図 8 から光のエネルギー E_{rain} が

$$E_{\text{rain}} \to E_{\text{far}}\frac{r_{\text{far}}}{r}\sin\theta_{\text{far}} \qquad \boxed{r \to 0} \quad \text{(B.42)}$$

となることを示せ。ここで、添字 far はブラックホールから離れた量であることを示す。

まとめると、落下者がブラックホールの中心にたどり着く直前に、運動方向に対して

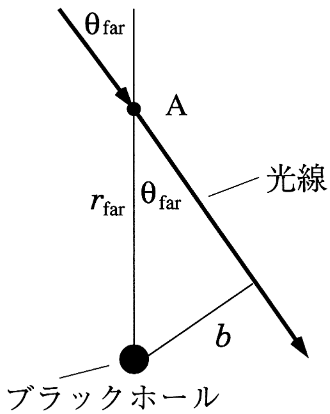


図 B.8 ブラックホールから遠く離れた距離 $r_{\mathbf{far}}$ にある **A** での観測者（光がブラックホールで曲げられないくらい遠く）は星を外向きの半径方向から角度 $\theta_{\mathbf{far}}$ の方向に見る。この図から、衝突パラメータが $b = r_{\mathbf{far}} \sin\theta_{\mathbf{far}}$ であることがわかる。r と θ は同じ **A** で測定される値である。

90 度の方向に眩いばかりの高エネルギー輻射のリングを見ることになる。この輻射は空の星すべてからきている。

これまでは落下者から見えるものについて述べてきたが、ブラックホールの周りを光が 1 回または数回まわる経路が存在し、そこから来る光による星のイメージには触れていない。この多重光路は 230 ページから始まる第 5 章の 5.11 節で詳しく述べられ、落下者が見る最後の風景になる。

B.10 追加プロジェクト

自転しない球対称ブラックホールの赤道面の時空および光と粒子の軌道の（非量子的）性質について思い浮かぶ疑問のすべてには、計量と極値的加齢の原理を使うことで答えられる。ここではブラックホールの地平線の内側での様子を何とか述べてきた。以下の質問には、第 4 章と第 5 章の内容を身に付けた後になってやっと答えられるようになる。

1. **周波数偏移。** 地平線外の球殻から内側へ落下する宇宙飛行士に向けて速報が周波数 f で発信される。落下者が受信したとき信号の周波数はどうなるか。一つの周波数だけに同調できる受信器を使うと、発信周波数 f を時間経過に合わせて変化させる必要があるか。
2. **星明り。** 地平線の内側（そして破砕点にたどり着く前）から見ると星空はどのように見えるだろうか。星の光を落下者が観測すると、周波数はどれだけ変わっているか。落下者が地平線から破砕点へ向かうと、これらの効果は時間とともにどのよう

に変化するか。

3. **雨粒系の軌道。** 質問 22 で落下者の単位質量当たりのエネルギーを導出した。第 4 章を終えた後、第 4 章の 2 節で雨粒系の角運動量がシュワルツシルト計量のふつうの形から得られるものと同じであること（質問 23）が確かめられるであろう。第 5 章を終えた後、フラッシュの運動方程式が雨粒座標でもシュワルツシルト座標と同じ形になることが確かめられるだろう。
4. **挿入問題。** 宇宙飛行士が中心への旅行を始めた半径はどこか。局所的な重力加速度が彼らを潰さない球殻からか。このような球殻から「20 年ブラックホール」の地平線までの「挿入」自由落下は数千年間続くだろう。このようなブラックホールの中心への旅行を始めるための実行可能な計画とは何か。たぶん、第 4 章の図 13 と練習問題 2 で述べるような、安定な円軌道が存在できる最小半径 $r = 6M$ にある宇宙ステーションから落下し始めるのだろうか。しかしその軌道への旅行はどれくらいかかるのか。そして自由浮遊軌道での潮汐力はどうなるか。
5. **別の落下系。** これまで、落下者の基準座標系である雨粒系の 1 組による観測だけを述べてきた。それは遠い所から静止状態で落下し始める。座標系は B.2 節で述べたように、雹系やしずく系など他にもある。これら別の座標の 1 つにおいて観測者は何を経験するのだろうか。

銀河技術センターはこれらの問題について、あなたの分析を期待している。

B.11 参照文献

雨粒系のアイディアは *Black Holes: The Membrane paradigm*, edited by Kip S. Thorne, Richard H. Price, Douglas A. Macdonald, Yale University Press, New Haven, 1986 の 22 ページやその他のページからのものである。雨粒観測者（rain observer）に対応する彼らの名は “freely falling observer” または FFO である。

130 ページのボックス「泡立て器時空（Eggbeater Spacetime）」の題は、*Black Holes and Time Warps*, Kip Thorne の第 13 章のある部分を使っている。電荷なしで自転しないブラックホールへの球対称崩壊の原論文は J. R. Oppenheimer and H. Snyder, *Physical Review,* Volume 56, 455–459 ページ（1939）．質量インフレーション特異点の記述は E. Poisson と W. Israel *“Inner-Horizon Instability and Mass Inflation in Black Holes,” Physical Review Letters,* Volume 63, November 16, 1663–1666 ページ（1989 年 10 月 16 日）にある。Lior M. Burko と William A. Hiscock は細部に渡ってボックスの内容について意見をくれた。以下の文献ではこのプロジェクトの内容の現在の研究に詳しい。Rhett Herman and William A. Hiscock, “Strength of the Mass Inflation Singularity,” *Physical Review D,* Vomule 46, Number 4, 1863–1865 ページ（1992）; Lior M. Burko and Amos Ori, “Introduction to the Internal Structure of Black Holes,” および Amos Ori, “On the Traversability of the Cauchy Horizon:

Herman and Hiscock's Argument Revisited," ともに *Internal Structure of Black Holes and Spacetime Sigularities,* coedited by L. M. Burko and A. Ori, Institute of Physics, Bristol, 1997 の *Annals of the Israel Physical Society* Volume XIII, Institure of Physics, Bristol, 1997.

この本のために、Charles W. Misner は大域的な雨粒系の計量 (B.15) , (B.16) を導出してくれた。(個人的な情報交換)。雨粒系の計量を最初に見つけたのは Paul Painlevé and Allvar Gullstrand らしい。さらなる形式的な導出と参考論文は "Regular coordinate systems for Schwarzschild and other spherical spacetimes," by Karl Martel and Eric Poisson, *American Journal of Physics,* Volume 69, Number 4, April 2001, 476–480 ページ。

第 4 章

軌道上の世界

- ブラックホールの周りの軌道は太陽の惑星の軌道とどう違うか。
- ブラックホールを軌道回転する石は光速に達するか。
- ブラックホールのどれくらい近くまで円軌道が可能か。
- ブラックホールの軌道を時間旅行に使うことができるか。

小石はなんて幸せなんだ
ブラックホールを独り回って *
仕事（キャリア）のことも気にかけず
衣食住こと欠くも恐れず
その天然の茶色の上衣（コート）
通りがかりの宇宙が着せた
ひとり立ちして太陽（おひさま）のよう
仲間と和するも独りっきりで輝くも
さりげなく素朴（シンプル）に
天命を果たしつつ

—エミリ・ディキンソン 1882 年（詩集番号 1570）
∗ 本来の詩の二行目は
「道路に独りころがって」

4.1 ステップまたは軌道

「まっすぐ進め」は極値的加齢を意味する。極値的加齢からエネルギーと角運動量が運動の定数であることが導かれる。

軌跡上の石がブラックホールまたは地球の周りを疾走する。何が石に動き方を教えるの

自然は石に「まっすぐ進め」と叫ぶ。

か？ 時空は石をしっかりとらえ、最も単純な命令を与える：「局所慣性系でまっすぐな世界線にしたがえ」瞬間瞬間、この指示だけで石が次に何をすべきか、次のステップの運動として何をすべきか教えるのに十分である。

その次のステップの知識は石にとっては十分であるが、しかし我々にとっては十分とは言えない。我々は時空全体を通じて石の軌跡を大域的に記述する方法を探している。その軌跡は一つの局所慣性系で覆える範囲を大きく超えてしまう。極値的加齢は我々の必要に答える。局所的条例「まっすぐ進め」を、固定された初期事象から固定された終事象までの時空全体に渡る一般的な法令に変更する。「初期事象と終事象の間」の法令は「極値的加齢の世界線にしたがう」これは、平坦または曲がった時空を通じて、できるだけまっすぐな世界線であり、**測地線**と呼ばれる。

運動の定数：エネルギーと角運動量

この章では、極値的加齢の原理を使い、球対称の引力中心の周りで最も単純化された石の軌道を説明する。単純化するために、運動しても変化しない量を使う。これらの変わらない量、つまり運動の定数はエネルギーと角運動量である。一般的な軌跡に対するエネルギーの導出は第 3 章で、半径方向に落下する特別な場合に導出したものと同じである。角運動量についてはこれからである。石が軌道運動してもエネルギーは変わらず角運動量も変わらない。それはどうやったらわかるのか。極値的加齢の原理によってだ。

4.2　極値的加齢から得られるエネルギーと角運動量

軌道の両端にある事象を固定し、その間の事象を変化させることにより運動の定数を見つける。

特殊相対論的形式は低速ではニュートン的になる。

特殊相対論を学んだとき（第 1 章）、ニュートン的なものとは違うエネルギーと線形運動量の相対論的形式を使うことを強いられた。我々はなぜ馴染みの薄い公式を受け入れたのか？ 相対論的形式だけが、孤立系で起きる高速衝突（またはその他の相互作用）における全エネルギーと全線形運動量の両方の保存法則を満たすからである。この古い縄張を離れるにあたって、我々にはどんな保証があるのだろうか？ 相対論的形式の値は低速の極限でニュートン形式と同じになるという保証があった（各孤立粒子の全エネルギーに静止エネルギー、つまり質量 m が含まれるという条件が必要である）。

一般相対論的表現はブラックホールから離れると特殊相対論的表現になる。

次に、ブラックホールの近くを動く石のエネルギーと角運動量の一般相対論的表現を導びこう。これらの新しい表現式をなぜ受け入れるのか？ 帯電も自転もしない引力中心に石が突っ込んだり球殻に落下したりすると、これらの公式だけが、エネルギーと角運動量の保存をもたらす。特殊相対論の馴染み深い縄張を離れるに当たって、我々にはどんな保証があるのだろうか。半径が大きくなるという極限において、つまりブラックホールから遠く離れた平坦時空において、新しい表現式は特殊相対論と等しくなるのだ。

157 ページのボックスでは、シュワルツシルト計量と極値的加齢の原理から角運動量を導出するために、以前行った懐かしい議論を使っている。結果として得られる運動の定

それで、時間とは何か。

それで、時間とは何か。誰も私に尋ねなければ、それが何であるかを知っている。もし私に尋ねた人にそれを説明しようとすれば、私は知らない。
この世は時の中で作られたのでなく、時間と同時にできたのだ。この世ができる前に時間は存在しなかった。
— アウグスチヌス
(St. Augustine 354–430 A.D.)

時間はすべてを取り上げ、すべてを与える。
— ジョルダーノ・ブルーノ
(Giordano Bruno 1548–1600)

人は時を恐れ、時はピラミッドを恐れる。
— 作者不明

哲学が、人生はさかのぼって理解しなければならないと言うのは全く正しい。しかし、そのときは、これから生きていかなければならないという別の条項を忘れている。
— キルケゴール (Søren Kierkegaard)

時間をむだにつぶしても、永遠は傷つかないとでも思っているのだろうか。
時は私が釣り糸を垂れに行くただの小川にすぎない。
— ソロー (Henry David Thoreau)

時間、空間、場所および運動などには、万人周知のものとして、その定義を与えることはしない。
— ニュートン (Isaac Newton)

運動が単純に見えるように時間は定義される。
— ミスナー、ソーン、ホイーラー
(Misner, Thorne and Wheeler)

時間と空間ほど私を悩ませるものはない。そして私はそれらについて考えたことがないので、まだそれほど困らされてはいない。
— ラム (Charles Lamb)

こいつが死んだか、オレの時計が止まったかどちらかだ。
— グルーチョ・マルクス (Groucho Marx)

「何時だ、ケーシー」
「ちょうど今の？」
— スティンゲル (Casey Stengel)

100 歳まで生きることはよいことだ。100 歳になる前にほとんどの人は死んでしまうから。
— バーンズ (George Burns)*1

時間とは、すべてのことが一度に起きないようにする自然の持つ仕組みだ。
—便所の落書き
(Graffito men's room,
Pecan St. Cafe, Austin, Texas)

この場所はいつニューヨークにたどり着くのか。
— スタンウィック (Barbara Stanwyck)
蒸気船 クイーンメリー号で大西洋横断中。

数は

$$r^2\frac{d\phi}{d\tau} = 一定 \tag{4.1}$$

である。(4.1) 式における一定の定数は、粒子の単位質量当たりの**角運動量 L** である： 　**角運動量の式**

$$\frac{L}{m} = r^2\frac{d\phi}{d\tau} \tag{4.2}$$

(4.2) 式が角運動量を表すことを再認識するためには、この式の分母が腕時計時間 $d\tau$ になっていることを除いて、ニュートン力学のもの（図 1）と同じ形をしていることに気が

つけばよい。腕時計時間になっていることは驚くべきことではない。線形運動量の相対論的形式（これから角運動量が作られる）も同じ位置に腕時計時間があった。

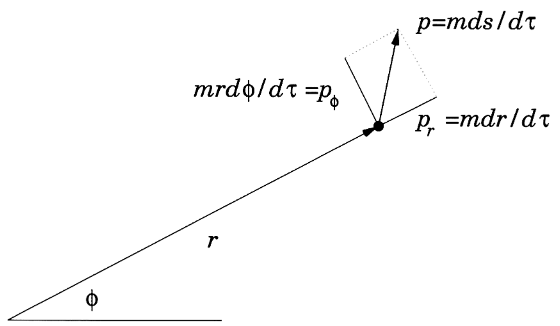


図 4.1 角運動量 L は r と、ϕ 方向の線形運動量 p_ϕ の積であり、$L = mr^2 d\phi/d\tau$ ((4.2) 式）となる。線形運動量の半径方向は p_r である。特殊相対論における線形運動量ベクトル $\boldsymbol{p}$ の大きさは $mds/d\tau$ である。ここで $d\tau$ は運動量を決めている粒子の腕時計時間の進みである。

エネルギーの式

第 3 章で 我々は単位質量当たりの全エネルギー E/m の式を求めるために同じような導出法を用いた。そのとき、石が運動して角度が変わろうが変わるまいが正確にエネルギーは同じ形になった。したがって、これまで求めた式は落下物体に対して正しく、同様に軌道運動する石に対しても正しい：

$$\frac{E}{m} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\tau} \tag{4.3}$$

エネルギーと角運動量は計量によって異なる。

ノート：運動の定数としてのエネルギーと角運動量の特別な式は、極値的加齢の原理だけに依存するのではなく、シュワルツシルト計量によって表される曲率にも依存する。これらの形はシュワルツシルト計量では表せない時空、例えば自転するブラックホールの周りでは保存量にはならない（プロジェクト F 「自転するブラックホール」を見よ)。

4.3 角運動量の性質

角運動量の新しい意味。

2 つの「運動の定数」

重力の球対称中心の周りを回る人工衛星の軌道を時空的な視点には ニュートンの洞察と共通するところがある。人工衛星がすばやく飛んでも変わらない 2 つの「運動の定数」がある。それは角運動量と全エネルギーである。

ニュートンの視点では、人工衛星の方位角を増加または減少させる方向に力がはたらかないとき、そのときに限り、人工衛星の角運動量は一定のままである。

角運動量の導出

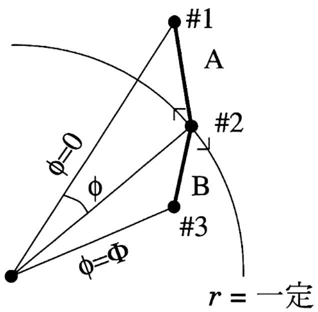


図 4.2 事象 #1 から事象 #3 への腕時計時間が極値を とるように、その間の角度 ϕ を選べ。

方針： 極値的加齢の原理とシュワルツシルト計量を使え。動いている粒子がフラッシュ #1 と #2, #3 を放ち、それらによって、軌跡上の区間 A と B が区切られる。これら 3 つすべてのフラッシュの時間とフラッシュ#1 と #3 の位置を固定する。フラッシュ #2 は円のどこかで光る（図 2)。なぜなら、この導出でフラッシュ #1 と #3 の間で記録される全腕時計時間を最大にするために、ϕ だけを変化させるからだ。その結果、運動の定数が得られる。これから詳しく見ていこう。

事象 #1 の角度を 0 に固定し、事象 #3 の角度を Φ におく。事象 #1 と #3 の間にある円に沿ってどちらかに事象 #2 の角度を変化させる（図の矢印を見よ)。r_{A} と r_{B} を区間 A と B の各々の半径の平均値とし、τ_{A} と τ_{B} をそれらに対応する石の腕時計時刻とする。これらを代入すると、区間 A に対するシュワルツシルト計量の時間的形式は（(4.12) 式を見よ）

$$\tau_{\mathrm{A}} = \left[-r_{\mathrm{A}}^2\phi^2 + (\phi\text{のない項})\right]^{1/2} \tag{4.4}$$

になる。

加齢の極値を求める準備のために、ϕ で微分すると

$$\frac{d\tau_{\mathrm{A}}}{d\phi} = -\frac{r_{\mathrm{A}}^2\phi}{\tau_{\mathrm{A}}} \tag{4.5}$$

となり、同様に区間 B に対して

$$\tau_{\mathrm{B}} = [-r_{\mathrm{B}}^2(\Phi-\phi)^2 + (\phi\text{ のない項})]^{1/2} \tag{4.6}$$

$$\frac{d\tau_{\mathrm{B}}}{d\phi} = \frac{r_{\mathrm{B}}^2(\Phi-\phi)}{\tau_{\mathrm{B}}} \tag{4.7}$$

となる。両方の区間の全腕時計時間は

$$\tau = \tau_{\mathrm{A}} + \tau_{\mathrm{B}} \tag{4.8}$$

である。これを ϕ で微分し、(4.5) 式と (4.7) 式を代入しゼロとする。つまり極値的加齢の原理を適用すると

$$\frac{d\tau}{d\phi} = \frac{d\tau_{\mathrm{A}}}{d\phi} + \frac{d\tau_{\mathrm{B}}}{d\phi} = -\frac{r_{\mathrm{A}}^2\phi}{\tau_{\mathrm{A}}} + \frac{r_{\mathrm{B}}^2(\Phi-\phi)}{\tau_{\mathrm{B}}} = 0 \tag{4.9}$$

が得られる。よって固有時が極値をとる時間経過の条件は

$$\frac{r_{\mathrm{A}}^2\phi}{\tau_{\mathrm{A}}} = \frac{r_{\mathrm{B}}^2(\Phi-\phi)}{\tau_{\mathrm{B}}} \tag{4.10}$$

となる。左辺は区間 A の量だけを含み、右辺は区間 B の量だけである。よって両方の区間に対して同じになる量を発見した。これが自由粒子に対する運動の定数である。この量を求めるに当たり、世界線の各区間は空間的にも時間的にも短いと仮定している。これらの量が微小であることを明確にするために、ϕ に対して $d\phi$, τ に対して $d\tau$ を使う。すると運動の定数は

$$r^2\frac{d\phi}{d\tau} = \text{運動の定数} \tag{4.11}$$

となる。本文ではこの運動の定数を単位質量当たりの粒子の角運動量 L/m としている。

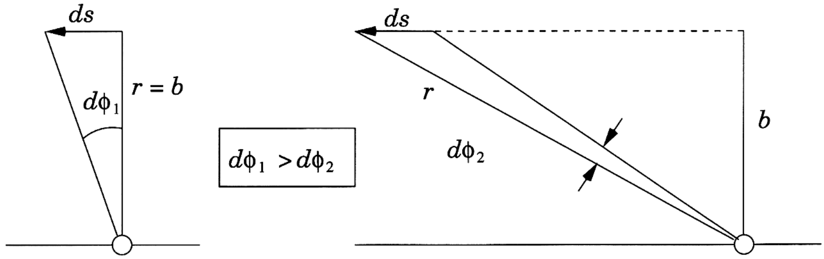


図 4.3　角運動量が運動の定数であるとき、r が変わると $d\phi/d\tau$ も変わることを意味する。平坦時空で直線上を動いている物体は同じ固有時内には同じ距離を進む。しかし、その物体が最小半径に近づくとき（左図）、通過する物体を見るために動かす望遠鏡の角度の変化 $d\phi_1$ は大きくなる。それに対して、物体が遠い距離に消えるとき（右図 —— 大きな r）、粒子の動く距離が同じであっても、望遠鏡の回転 $d\phi_2$ はずっとゆっくりになる。引力中心が運動する物体にどんな効果も及ぼさないとき、最も近づいた距離は、いわゆる衝突パラメータ b の値に等しい。

それに対して時空物理の視点では、人工衛星には全く力がはたらかない。引力中心の方向にさえもだ。人工衛星は、時空の中で自分の知る限り最もまっすぐな世界線上を運動する。つまり局所自由浮遊系の中の測地線に沿って運動するのだ。方位角 ϕ を増加させる方向にはたらく力を探す代わりに、時空幾何学における ϕ の対称性を探す。シュワルツシルト計量は（この本の終わりの公式集の (A) 式）半径 r に依存するが、ϕ の角度には依存しない：

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \dfrac{2M}{r}\right)} - r^2 d\phi^2 \tag{4.12}$$

t と ϕ の対称性から運動の定数が予測される。

角度 ϕ が変わっても計量は変わらない（ϕ でなく、変化量 $d\phi$ だけが計量の中にある）。運動の定数、つまり角運動量はこの対称性に対応する。同じことが時間座標 t にも言えることに注意しよう。変化 dt だけが計量の中にあり、t の対称性に対応する時間の定数、エネルギー E が存在することをすでに我々は知っている。座標系 r それ自身が dr とともに計量の中にある。r について対称性がないことから、3 番目の運動の定数は存在しないことになる。

角度の運動を記述する我々の方法、つまり時空幾何において ϕ の変化がないことを利用することは、粒子の方位角の変化が一定だ（$d\phi/dt$ が一定）と言っているわけではない。角運動量が一定かといわれると YES だが、角速度 $d\phi/dt$ が一定かと言われると NO だ。これが真実であるという印象的な例が我々の手のすぐ届く所にある（図 3）。質量中心という名前だけ残し、質量などすべてなくしてしまおう。そしてそこを人工衛星がすばやく一様速度で直線上を通り過ぎる。

角運動量が一定のもとで、r が変化するとき角速度は一定になれない。(4.2) 式を

$$\begin{pmatrix} \text{人工衛星によって} \\ \text{感じられる角速度} \end{pmatrix} = \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{(\text{角運動量}=\text{一定})}{(\text{質量})\, r^2} \tag{4.13}$$

と書き直すことにより、最も直接的に角速度の変化を知ることができる。

引力源の質量をすべて取り除いた後に引力中心に立ち、後退する人工衛星を見ていると、人工衛星が遠ざかるにつれて、望遠鏡の追いかける速度がどんどんゆっくりとなっていくことがわかる（図 3)。この発見は高速道路で猛スピードで走る車を見ている人にとっては身近で当り前のことであり、角運動量保存則を日常のこととして、たぶん最もよく知っていることであろう。

ここで、自転せず帯電していない球対称の質量を引力中心に置く。もはや人工衛星が無限遠へ飛んでいってしまうことが必ずしも正しくなくなる。実際、ふつう引力中心をグルグル回らない限り、物体に「衛星」という名をつけはしない。その運動で、中心からの距離はふつう小さい値から大きな値の間を振動する。中心から近い距離のときは？ 角速度は大きくなる。中心から遠い距離のときは？ 角速度は小さくなる。

大きな r では ϕ の変化率は小さい。

しかし角速度と半径 r の相関は距離と角速度を結びつけている (4.2) 式と (4.13) 式にまだしたがっている。角速度は r^2 に反比例したままである。

L だけを使うよりも、相対論的角運動量の保存則として比 L/m を使う。なぜか？ 異なった質量 m の粒子が時空中で同じ世界線にしたがうことを知っているためだ。運動を記述するものは、舞上がる粒子の質量それだけでもなく、角運動量それだけでもなく、その 2 つの比 L/m である。メートルで表される固有時 τ と単位のない角度 ϕ で表される (4.2) 式から、L/m の単位がメートルであることがわかる。

これから我々は「軌道上の r で角速度がいくらか」という質問をしないことにする。その代わりに「腕時計時間の微小増加 $d\tau$ に対して人工衛星の方位角 $d\phi$ がどのくらい進むか」と尋ねることにしよう。答えは角運動量保存則から得られる。つまり、(4.2) 式の両辺に $d\tau$ をかけ、r^2 で割ったもの

角度 ϕ は人工衛星時間 τ とともにどのように変化するか。

$$d\phi = \frac{(L/m)}{r^2} d\tau \tag{4.19}$$

から得られる。(4.19) 式には軌道の中身のうちの半分がある。それは方位角 ϕ の増え方と角運動量に焦点を絞った部分である。それでは、残りの半分である r の進み方とエネルギーの関係について述べよう。

4.4 軌道の予測

人工衛星の腕時計は $d\tau$ で時を刻む。$d\tau$ から dr, $d\phi$, dt に起きる変化を計算せよ。

我々は 時間と空間の世界の中で、人工衛星の進みを一歩一歩計算するために必要とする道具を手中に収めた。進みとは何か？ (1) 遠方時間の進み dt, (2) 方位角の進み $d\phi$、

ϕ と r は人工衛星時間 τ の変化とともにどのように変化するか。

例題 1 ブラックホールの近くからの脱出

半径 $r_0 = 10M$ の球殻の指令官が人工衛星を水平（つまり外向き半径方向から 90°）に $v_{0\ \text{shell}} = 0.500$ の速さで発射させる。これらの量はともに局所球殻時計と物差しで測定した値である。人工衛星の単位質量当たりの角運動量 L/m はいくらか。単位質量当たりのエネルギー E/m はいくらか。この人工衛星は遠い距離に脱出できるか（**注意**：ここで「球殻」という語は球殻とその観測者のことを言い、打ち上げられる人工衛星のことではない）。

解答

人工衛星は初期速度 $v_{0\ \text{shell}} = dx_{\text{shell}}/dt_{\text{shell}} = 0.500$ で水平に打ち上げられる。角運動量 L（(4.2) 式）を計算するために、分母には球殻時間 dt_{shell} でなく、固有時 $d\tau$ を必要とする。$d\tau$ を求めるために、人工衛星から発光される 2 つのフラッシュを考えよう。これらのフラッシュの固有時 $d\tau$ は人工衛星の時計で直接測定できる。dt_{shell} と $d\tau$ の間の関係はちょうど特殊相対論の式で与えられる：

$$\begin{aligned}\frac{dt_{\text{shell}}}{d\tau} &= \gamma_{0\ \text{shell}} \equiv (1 - v_{0\ \text{shell}}^2)^{-1/2} \\ &= (1 - 0.5^2)^{-1/2} = 1.155 \end{aligned} \tag{4.14}$$

この結果を角運動量の定義に代入し、 $dx_{\text{shell}} = r_0 d\phi$ に気をつけると

$$\begin{aligned}\frac{L}{m} &= r_0^2 \frac{d\phi}{d\tau} = r_0 \frac{dt_{\text{shell}}}{d\tau}\left(\frac{r_0 d\phi}{dt_{\text{shell}}}\right) \\ &= r_0 \gamma_{0\,\text{shell}} \frac{dx_{\text{shell}}}{dt_{\text{shell}}} \\ &= r_0 \gamma_{0\,\text{shell}} v_{0\ \text{shell}} \end{aligned} \tag{4.15}$$

となる。これから単位質量当たりの角運動量の数値がわかる：

$$\begin{aligned}\frac{L}{m} &= r_0 \gamma_{0\ \text{shell}} v_{0\ \text{shell}} \\ &= 10M \times 1.155 \times 0.500 \\ &= 5.775M \end{aligned} \tag{4.16}$$

エネルギー（(4.3) 式）を計算するためには、遠方時間と人工衛星の腕時計時間の比 $dt/d\tau$ の値が必要である。シュワルツシルト計量は球殻時間と遠方時間を関係づける（本書の公式集の (A) 式と (C) 式を見よ）：

$$\frac{dt}{dt_{\text{shell}}} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2} \tag{4.17}$$

これらの式と単位質量当たりのエネルギーの式 (4.3) から

$$\begin{aligned}\frac{E}{m} &= \left(1 - \frac{2M}{r_0}\right)\frac{dt}{d\tau} \\ &= \left(1 - \frac{2M}{r_0}\right)\frac{dt}{dt_{\text{shell}}}\frac{dt_{\text{shell}}}{d\tau} \\ &= \left(1 - \frac{2M}{r_0}\right)\left(1 - \frac{2M}{r_0}\right)^{-1/2}\gamma_{0\ \text{shell}} \\ &= \left(1 - \frac{2M}{10M}\right)^{1/2}\gamma_{0\ \text{shell}} \\ &= (0.8)^{1/2} \times 1.155 \\ &= 1.033 \end{aligned} \tag{4.18}$$

が求められる。

「人工衛星は遥か彼方へ脱出できるのだろうか」という疑問に対する答えは「たぶん」となる。全エネルギー E は静止エネルギー m よりもわずかに大きい。もし粒子が外向きの半径方向に打ち上げられれば、遥か彼方までたどり着き、まだ運動しているだろう。それに対し、人工衛星が下向きに発射されると、確実にブラックホールに突っ込むだろう。しかしこの問題では、局所球殻系で測ったとき半径方向に対し垂直に発射体が打ち上げられることになっている。コンピュータで軌道を追跡すると、問題に答えることができる。有効ポテンシャル（4.7 節）を使えば、即答できる（174 ページの例題 2）。

(3) r 座標の進み dr。どれでも好みに合わせて、また使いやすいように選べる。それらはすべて人工衛星に乗せられたすべての腕時計の時間の進み $d\tau$ に帰着する。この分析は162 ページのボックスで行なわれる。

4.5 「ナイフエッジ」軌道

危ういぐらつき。

天の川銀河の中心に 260 万太陽質量のブラックホールがあり、その周りを回っている人工衛星が落ち込んでしまうかどうか知りたい。もともとこの人工衛星はブラックホールの非常に近い所をかなり大きな速度で軌道運動していた。突然、この系の近くを中性子星が通りすぎ、人工衛星の軌道をかき乱した。

銀河中心のブラックホールの周りの軌道を計算せよ。

我々の銀河の中心にあるブラックホールを軌道運動する人工衛星がかき乱されたとして、コンピュータに数値を与える。数秒以内に、コンピュータは図 4 の**シュワルツシルト地図**を描く。それには驚くべき運動が描き出される。太陽系の惑星の運動から知られている円や楕円軌道とは予想以上に違う。人工衛星もどんな惑星も難なく中心から最大距離に達する。しかし惑星と人工衛星の類似性はここで終わる。太陽系の惑星は外側に向かって動いた後、最も近い距離に来て向きを変えて戻る。人工衛星の内向きの速さも質量中心に近づくと減り、どんどん減ってほとんど 0 になる。しかし、この 2 つには差がある。人工衛星の内向きの速さは長い間小さいままである。それに対して、惑星の速度は内向きから外向きへぐるりと変わる。惑星が方向転換する短い間に、惑星はあまり進まず、親しみある楕円を描く。しかし人工衛星の半径方向の速度は低い状態であまりに長く留まり、その間に方位角はかなり進んでしまい、我々の例では 4 回転半している。そのときになってやっと、未来への道は開かれ、はっきりと正体を現す。「なぜだ。なぜなんだ」と船長は叫ぶ。「ロケットエンジンを搭載していないのだ。我々は落下と脱出の間をふらふらよろめきながら歩いているため、我々にとってエンジンがないことは運命の分れ道になっていたのだ。しかし今となっては手遅れだ」

このナイフエッジ軌道は 4.7 節で、特に図 9 で説明されるだろう。

アインシュタインは曲がった時空を「発明した」

フランシス・ベーコン以来ずっと信じられてきたことがある。それは自然の法則は正しい実験が行われたときのみ「発見されたもの」として存在するということだ。アインシュタインはそれが正しくないことを教えてくれた。人間の創意が発見の過程において極めて重要な役割を果たすことを力説した。ニュートンは重力を「発明して」惑星の軌道を説明した。アインシュタインは曲がった時空と幾何学の法則を「発見した」。彼の理論では重力は存在しない。このような完全に異なる数学モデルがともに同じ観測を説明するならば、我々は物理理論から自然とは何かを知ること

軌道の計算

方針： 初期位置と初期速度から単位質量当たりの角運動量 L/m と単位質量当たりのエネルギー E/m の値を求めよ。

ステップ 1： dt と $d\phi$ を人工衛星の腕時計 $d\tau$ で表せ。

ステップ 2： これらの結果をシュワルツシルト計量に代入し、dr を $d\tau$ の関数として表せ。

結果： 記録係におけるすべての増分 $dt, d\phi, dr$ は人工衛星時間の増分 $d\tau$ から得られる。

コンピュータ： コンピュータに初期位置を代入し、人工衛星時間 τ を進め、t, ϕ, r に新しい数値を代入させる。これから詳しくみていこう。

ステップ 1： (4.3) 式にあるように、エネルギー保存則から読みとれる時空における最初の進み：

$$dt = \frac{E/m}{1-\dfrac{2M}{r}}d\tau \tag{4.20}$$

同じように角運動量保存則 (4.19)

$$d\phi = \frac{L/m}{r^2}d\tau \tag{4.21}$$

から方位角の進みを求めよ。

ステップ 2： 現在、$d\tau$ で書き表された dt と $d\phi$ があるが、人工衛星の時計が 1 刻み（$d\tau$）する間に時間と空間の中で人工衛星の変位を完全に記述するためには、dr だけが不足している。未知の dr は 3 つの既知の量 $dt, d\phi, d\tau$ と一緒に標準的なシュワルツシルト計量の中に現れている：

$$d\tau^2 = \left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 - \frac{dr^2}{1-\dfrac{2M}{r}} - r^2 d\phi^2 \tag{4.12}$$

この式に (4.21) 式から dt,(4.20) 式から $d\phi$ を代入し dr について解け。その結果、dr と $d\tau$ を関係づける式が得られる：

$$dr = \pm\left[\left(\frac{E}{m}\right)^2 - \left(1-\frac{2M}{r}\right)\left\{1+\left(\frac{L}{mr}\right)^2\right\}\right]^{1/2} d\tau \tag{4.22}$$

r と ϕ の初期値から始めると、(4.21) 式と (4.22) 式から、時を刻むにつれて各記録係の極座標の値から人工衛星時計がどのように変化するかがわかる。もしシュワルツシルト記録係が、遠方時間 t でも増分を表せるように要請すれば (4.20) 式から dt の変化を得ることができる。

プログラマーに対する技術的に細かな 2 つの注意：
まず第一に (4.22) 式の平方根から dr の大きさがわかるが、符号はわからない。したがって r が初めに大きくなるか小さくなるかは初期条件から決めなければならない。第二に、r が最大値または最小値をとるとき、軌道は方向転換することが多い。正確な方向転換の位置で、時間が変化しても半径 r は変わらないため、dr は 0 であり、(4.22) 式の大括弧の中（r の関数）は 0 となる。これが一旦 0 になると、大括弧が 0 である限り、$dr = 0$ になるので、反復過程で大括弧の中は 0 のままになる。ここでの基本的な問題は、すべてを 1 階微分へと単純化してしまったことにあり、最大または最小のところでは 2 階微分が必要となる。計算におけるこれらの技術的な困難は、ここではこれ以上考えない。

ができず、ただ自然がどのようであるかを知るのみである、と認めなければならない。驚くべきことに、自然は…構成され得る「最も単純な」モデルに同調しているようだ。

—リンドラー（Wolfgang Rindler）

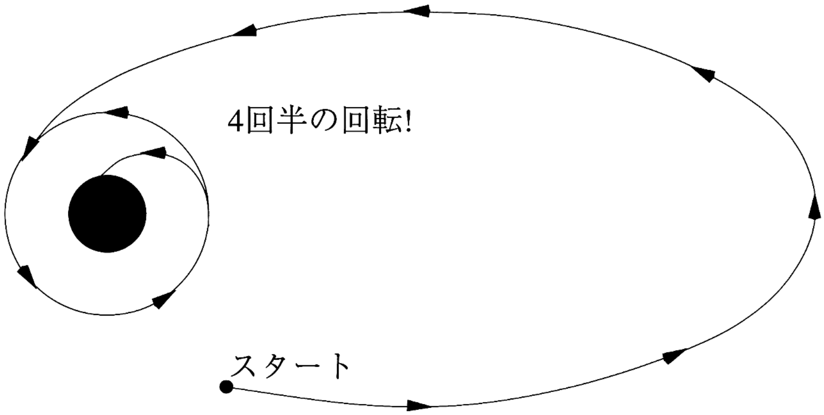


図 4.4　中性子星が横切ることにより、ブラックホールの近くの人工衛星の軌道が揺れて、ずれた後の大まかなシュワルツシルト地図。空間中の経路は、ニュートン力学から予測される楕円とは大きく異なっている。特に、経路が閉じていないことや不安定で一時的な「ナイフエッジ」円軌道があり、それにしたがうと、軌道上の観測者の腕時計で測ると、その後ブラックホールの地平線を通って落下してしまう。この図はコンピュータプロットではなく、軌道の大まかな性質を備えた定性的なスケッチ的な図である。説明は 4.7 節と図 9 を見よ。

どこから 4 周半という回転が得られるのか。どうして 3 周ではないのか。何が「危ういぐらつき」の期間をきめているのか。

ブラックホール近くの暗黒空間でぐらついている宇宙船は、机の上で先端でバランスをとっている鉛筆と原理的に変わらない。やってみたまえ。鉛筆はどれくらいバランスをとったままでいられるだろうか。1 秒？ 10 秒？ それは場合による。何が違うのか。鉛筆が手から離れた時、どれだけ垂直に近いかだ。手から離れた時、静止していたか、少し動いていたかで結果は違ってくる。部屋の空気の流れにもよるし、机の振動にも、鉛筆がもやはバランスをとれなくなったという基準にもよる。同じような不定性のために、ブラックホールの近くでふらついている宇宙船の状態が決まる。図 4 の例では、説明のためだけに 4 周半の回転を何の意図もなく選んだ。

我々は今や、球対称の引力中心の周りの豊富な軌道を記述するための心強い道具を手に入れた。実際に、可能性があまりに大きく開けているため、一度にいろいろたくさんの軌道を定性的に理解するためには単純な図のようなものが必要となる。このような図として 4.7 節で表される、いわゆる**有効ポテンシャル**を使う。その前に、まず 4.6 節で概略的に、ニュートン力学の有効ポテンシャルに目を通してみよう。

4.6 ニュートン力学の有効ポテンシャル

有効ポテンシャルを一目見れば、粒子のニュートン的軌道を予測できる。

角運動量はニュートン力学でも相対論と同じ形になるが、(4.2) 式で固有時 τ の代わりに「ニュートンの絶対時間」 t を使う：

$$\frac{L_{\rm conv}}{m_{\rm conv}} = r^2 \frac{d\phi}{dt_{\rm conv}} \qquad \boxed{\text{ニュートン}} \quad (4.23)$$

ここで添字 "conv" で秒やキログラムのような通常の単位を使うことを思い出してもらいたい。この場合 $L_{\rm conv}$ の単位はキログラムメートル ^{2}/秒である。

ニュートンのエネルギーは時間の定数であり、逆 2 乗の重力に対してエネルギーはジュールの単位であり、運動エネルギーと位置エネルギーの和になる。通常の単位の $m_{\rm conv}$ で割ると

$$\frac{E_{\rm conv}}{m_{\rm conv}} = \frac{1}{2} v_{\rm conv}^2 - \frac{GM_{\rm kg}}{r} \qquad \boxed{\text{ニュートン}} \quad (4.24)$$

角運動量保存則を使ってエネルギーを単純にせよ。

となる。しかし、速度の 2 乗は、半径成分の 2 乗と ϕ の成分の 2 乗の和である。角運動量に対して (4.23) 式を使って結果の式を簡単にせよ：

$$v_{\rm conv}^2 = \left(\frac{dr}{dt_{\rm conv}}\right)^2 + \left(r\frac{d\phi}{dt_{\rm conv}}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt_{\rm conv}}\right)^2 + \frac{L_{\rm conv}^2}{m_{\rm conv}^2 r^2} \qquad \boxed{\text{ニュートン}} \quad (4.25)$$

(4.24) 式に v^2 を代入せよ：

$$\frac{E_{\rm conv}}{m_{\rm conv}} = \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt_{\rm conv}}\right)^2 + \left[-\frac{GM_{\rm conv}}{r} + \frac{(L_{\rm conv}/m_{\rm conv})^2}{2r^2}\right] \qquad \boxed{\text{ニュートン}} \quad (4.26)$$

(4.26) 式がニュートン的であったとしても、慣れた幾何学単位で単純化して使い続けたい。E と m を同じ単位で、引力中心を長さの単位で測りたい。(4.26) 式の両辺を変換因子 c^2 で割れ。すべての単位が $E_{\rm conv}/m_{\rm conv}c^2 = E/m$ で打ち消し合い、それに $GM_{\rm conv}/c^2 = M$ が長さの単位になることを確認せよ。(4.23) 式から $L_{\rm conv}/m_{\rm conv}$ の通常の単位がメートル ^{2}/秒であることがわかる。時間がメートルになる単純な単位で表すために、c で割って $L = L_{\rm conv}/cm_{\rm conv}$ を求めよ。置き換えた後に、半径速度の 2 乗の式 (4.26) について解け：

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{E}{m} - \left[-\frac{M}{r} + \frac{(L/m)^2}{2r^2}\right] \qquad \boxed{\text{ニュートン}} \quad (4.27)$$

ニュートンの有効ポテンシャル

さて、半径方向の速度を**測定**するために、全エネルギーから取り出すべきものとして有

効ポテンシャル $V(r)$ を定義する：

$$\left(\begin{array}{c}\text{人工衛星の単位質量当たり}\\ \text{の有効ポテンシャル}\end{array}\right) \equiv \frac{V(r)}{m} = -\frac{M}{r} + \frac{(L/m)^2}{2r^2} \qquad \boxed{\text{ニュートン}} \quad (4.28)$$

半径方向の 2 乗速度の式は

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{E}{m} - \frac{V(r)}{m} \qquad \boxed{\text{ニュートン}} \quad (4.29)$$

になる。図 5 に (4.28) 式の有効ポテンシャルを描き、それを構成している項も示した。最初の項は中心に向けて減少しており、「重力」による引力に対応する。大きな半径でこの項は優勢になり、軌道運動している粒子は中心に引き寄せられる。それに対して、2 番目の項は中心に向けて増加し、反発力に対応する（反発の有効ポテンシャルは「遠心力」になる)。近い距離でこの項は優勢になり、軌道運動する粒子は外側に反発される。中間の距離で、2 つの競合する内向き外向きの傾きの項は互いに打ち消し合い、有効ポテンシャルに最小値を作る。

有効ポテンシャルにおける反発力の項の源は何か。

有効ポテンシャル、165 ページのニュートンの式 (4.28) と 171 ページの相対論の式 (4.32) は、方位角の運動は想像にまかせて、半径方向の 1 次元の運動に焦点を当てている。しかし r の次元だけでは現実から離れてしまう。図 6 に描かれた人はポールにしがみ着いて進み、円の周りも回る。彼は外向きの力、時に遠心力と呼ばれる力を経験し、それは非慣性的な回転基準座標系での円軌道の結果として生じている。この外向きの力は有効ポテンシャルの反発項のもととなる。

有効ポテンシャルの反発項としてもっと具体的に感覚でわかるようなものはないか。

うん、そうだね。一端を軸として回転できる軽いポールにあなたはしがみつき、水平面を自由に回転することを考えよう（図 6)。中心を向く唯一の力はポールを握る手の力だけである。軸から離れて回転するとぶら下がるのが難しくなる。つまり回転基準座標系にいるため、慣性「遠心力」によって外側に引っ張られるように感じられる。今、ポールをしっかり握って中心に向かって手繰り寄せる。角運動量保存から、回転率が増えることがわかる。あなたにはたらく外向きの有効力は 2 つの理由で鋭く増加する。第一に、あなたが中心軸に近づくため、小さな円上を動くことになる。第二に、小さな円をより大きな速さで動くことになる。ポールに沿って、しがみつきながら中心に近づけば近づくほど、遠心ポテンシャルは握っている手を引き離そうとする。実際にやってみると、これ以上内側に引っ張っても進むことができない最小の半径があることがわかる。あなたは死に物狂いで最も内側のところでに引っかかっている。すぐに頭が垂れ下がり、手は疲れあなたはポールに沿って外に向け滑べり、ポールから離れていく。あなたの友達は笑いながら網をもって待っており、あたたはその中に放り出される。有効ポテンシャルの中にある、恐ろしい反発項を個人的に経験したのだ。

かなり絵画的だ。手が痛くなる。しかし私が地球を回る軌道上にいる場合はどうか。何も感じない。無重力だ。重力による内向きの引力を感じないし、有効ポテンシャルの中の恐ろし

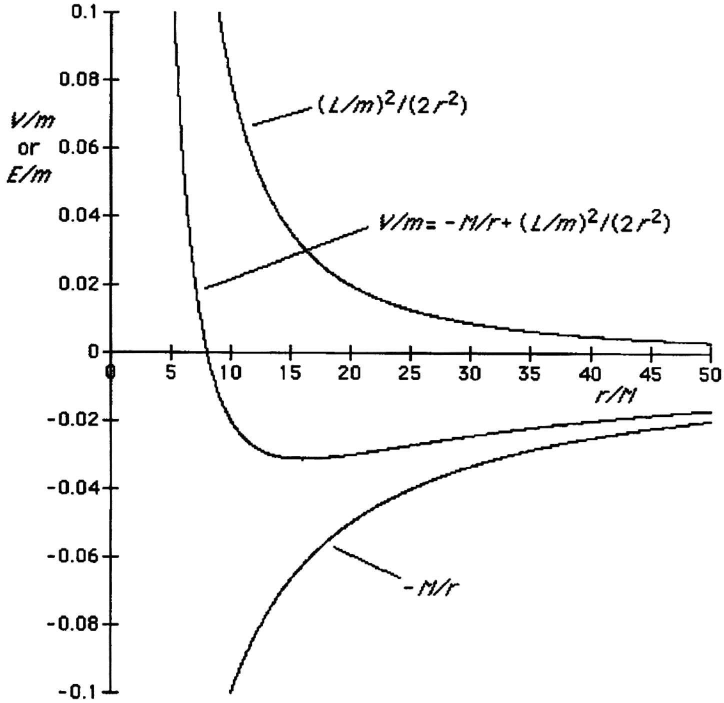


図 4.5　コンピュータプロット：**2** つの項の和として表されたニュートンの有効ポテンシャル（中間の曲線）：有効ポテンシャルが、重力ポテンシャル（下の曲線）と角運動量による「反発」項の和として表されている。特別な場合 $L/m = 4M$ に対して **(4.28)** 式（上の曲線）が示されている。

い反発項も感じない。この有効ポテンシャルはどこへ行ってしまったのか。私が力を感じない状況で有効ポテンシャルを考えることに何の得があるというのか。

ニュートン力学には自由軌道における無重力について複雑な説明が 2 つあり、アインシュタインには簡単な説明が 1 つある。
ニュートンの無重力の第一の複雑な説明：引力中心から見ると、あなたの体のすべての粒子は等しく「重力加速度」を経験している。体の別々の部分が同じ内向きの加速度を経験する。したがって、互いに近い部分の間では「相対」加速度は存在せず、あなたの体を繋ぎ留めているボンドは張力も圧縮力も感じない。あなたは何も感じない。
ニュートンの無重力の第二の複雑な説明：あなたのいる加速度基準座標系から見ると、体の粒子すべては大きさが等しく方向が逆の力を経験する。第一の力：重力であり、中心に向かう。第二の力：遠心力であり、中心から外に向かう。あなたの加速度系でこの 2 つの力がバランスをとり、体の各粒子が感じる力は正味ゼロである。互いに近い粒子もそうである。あなたの体を繋ぎ留めているボンドに張力ははたらかない。

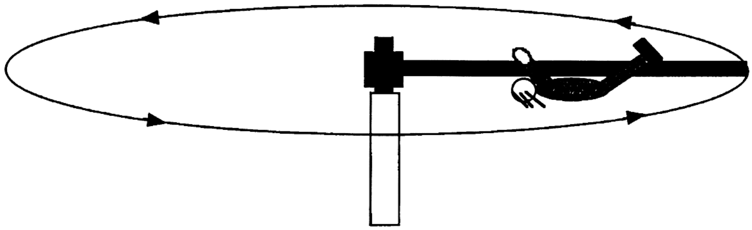


図 4.6 遠心力を経験するために、自由に回転するポールに沿ってしがみついて中心に向かう人。

アインシュタインの簡単な説明：軌道上で、あなたは自由浮遊系（慣性系）にいる。座標系は引力中心の近くでさえも自由浮遊でいられる。自由浮遊系では自由に浮遊し力を感じない。

軌道上での経験は、ポールに沿って手で進む私の経験とどのように違うのか。

全然違う。アインシュタインの視点では、ポールを握る力によってあなたは自由浮遊運動から引き離されるように引きずられる。回転系に適用されるニュートンの視点では、遠心力はあなたの体の粒子すべてにはたらき、内向きの力は手を通じてはたらく。内向きの力が体の他のすべての粒子に骨や筋肉を通じて伝えられる。これらは張力を経験し、あなたは絶対に無重力を感じない。

では、地上に立っているときは？

同じようなやり方でできる。アインシュタインは、あなたの足にはたらく力はあなたを自由浮遊系から引き離すように押し上げると言う。ニュートンはあなたの体のすべての粒子は下の方に「重力」としてはたらき、上の方の力は足を通じてはたらく。上への力は体のすべての粒子に骨と筋肉を通じて伝えられなければならず、（足と胴体に）圧迫を感じたり、（脇から付いている腕に）張力を感じる。再び、あなたは体重を感じる。

4.7 シュワルツシュルト計量の有効ポテンシャル

一目でわかる軌道。

162 ページのボックスに、石の軌道を計算するためのコンピュータの使い方が書かれている。この節では石の軌道の解析の概略をもっと単純な方法で示す。いわゆる**有効ポテンシャル**を調べることによって、どんな粒子の軌道でもその主な性質が一目でわかるようになる。コンピュータのプリントアウトよりも明快に、我々の軌道よりも明快に、有効ポテンシャルから人工衛星の運動の中心となる特徴が一目でわかる。基本的なアイディアはニュートンの分析と似ている（4.6 節）。

一般相対論で現れる新たな結果の主なものは有効ポテンシャルを使えば単純に述べることができる。遠い距離では重力の引力ポテンシャルが影響を与え、中間の距離では角運動

プレビュー：ポテンシャルのくぼみ

量が反発の効果を及ぼすが、それに加えアインシュタインの理論はポテンシャルにくぼみを与える。このくぼみの存在により (1) 近づく粒子が捉えられ、(2) このブラックホールの捕捉過程で最も近い臨界距離が確定し、(3) 臨界点を越えることなく近づく粒子に対して、ニュートンの予想よりも転向時間が長くなる。そのため (a) 出入りの半径運動の時間は一回転の周期よりも長くなり、(b) そのため楕円軌道の長軸を回転させ、(c) 速い粒子はニュートン理論が予測するよりも大きな角度で曲げられる。その結果 (3) a, b, c は太陽系で観測される運動によって直接確かめられる。

くぼみは運動の定数からくる。

ポテンシャル？ ポテンシャルのくぼみ？ 遠い距離での引力ポテンシャル、中間の距離での反発力、さらに小さな距離で再び引力？ 単純で明快確実な原理からこのポテンシャルの性質を知ることができるのか？ そうだ。二つの原理：運動の定数としてのエネルギー、運動の定数として角運動量から。

図 7 に示した固いプラスチック面でビー玉を転がせば誰でも有効ポテンシャルに似たものを目にすることができる。ビー玉は「カップ」の底に止まっている (上図の白丸)。ある r の値に留まっていれば、運動は必ず円軌道上にある。次にビー玉を少し動かす。前後に転がり、振幅の小さい振動をする (上図の黒丸)。r の値が時間とともに変化するとき、ニュートン的に惑星軌道を述べれば正確に楕円軌道である。

新しい特徴：小さい半径での捕捉

さて一般相対論により新しい状況がもたらされる (図 7 の下図)。左の小山の頂上を越えられるように、右の坂の高い位置からビー玉を放す。ゆっくりゆっくりと、ちょうど越える程度でもよいのだが、必ず新しい領域に入るようにする。x 方向のビー玉の動きは正確に、図 4 の人工衛星の r の振舞いに似ており、ほとんど一定の半径で何回も回転し、内向きの螺旋上を動いてブラックホールに突入する粒子の軌道となる (図 8 と図 9)。

人工衛星のエネルギーは半径が変わっても変化しない。

有効ポテンシャルの言葉で表すと、2 つの性質が半径運動を決める。1 つは、ビー玉の x 座標や人工衛星の r 座標のような、注目している座標系での曲線の高さである。もう 1 つの性質は、関数で表される曲線ではなく、数で表される定数である。図 7 ではビー玉を放す高さであり、人工衛星の運動ではエネルギーである。粒子のエネルギーは運動の定数であって、半径によって変わらない。その結果として、エネルギーに対する位置のプロットは水平線となる。いろいろなエネルギーに対応する水平線が図 8 に引かれている。

人工衛星の腕時計で測り、(4.22) 式から半径速度の 2 乗を求めるとき、一定のエネルギーと有効ポテンシャルはともに明確になる：

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \left(\frac{E}{m}\right)^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left[1 + \frac{(L/m)^2}{r^2}\right] \tag{4.30}$$

(4.30) 式を使って新しい項 V/m を導入する：

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \left(\frac{E}{m}\right)^2 - \left(\frac{V}{m}\right)^2 \tag{4.31}$$

(4.31) 式において、r 依存する有効ポテンシャル $V(r)$ の**定義**は、半径速度の 2 乗を得るためにエネルギーの 2 乗の項から引き去ったものであるとする。

有効ポテンシャルの定義

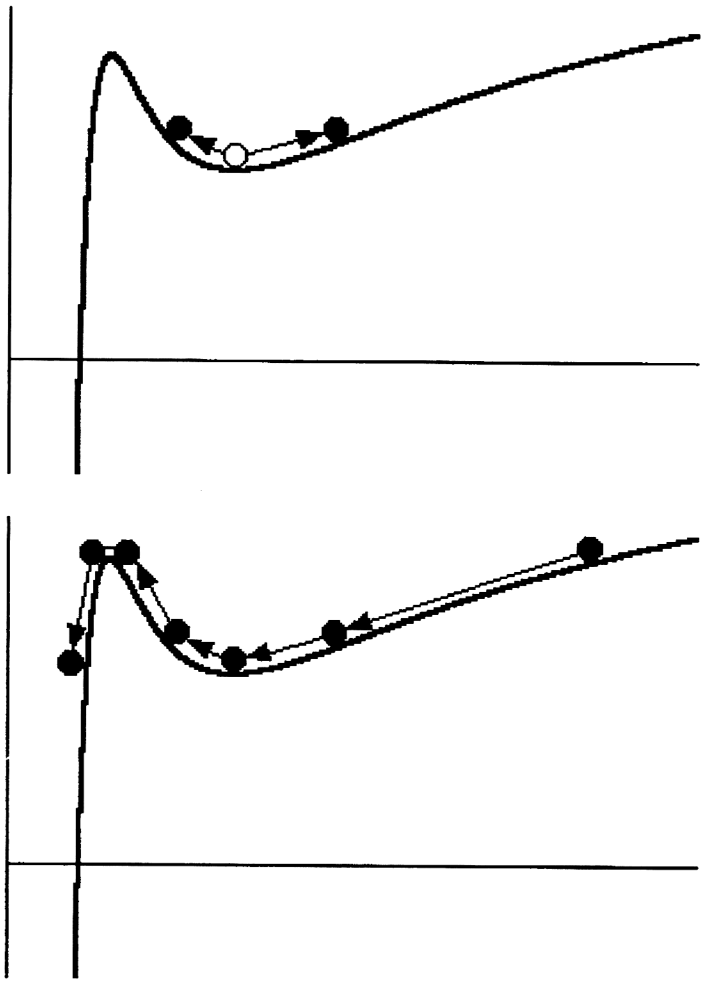


図 4.7　コンピュータプロット：プラスチック面上を転がるビー玉 y-x. 上図：最小値に静止して置くと、ビー玉は止まったままである（白丸）。最小値からずらして放すと、ビー玉は内側と外側の範囲を前後に振動する（黒丸）。下図：右の坂の十分遠くから放すと、ビー玉は左の丘をかろうじて乗り越え、新しい領域へ突入する。

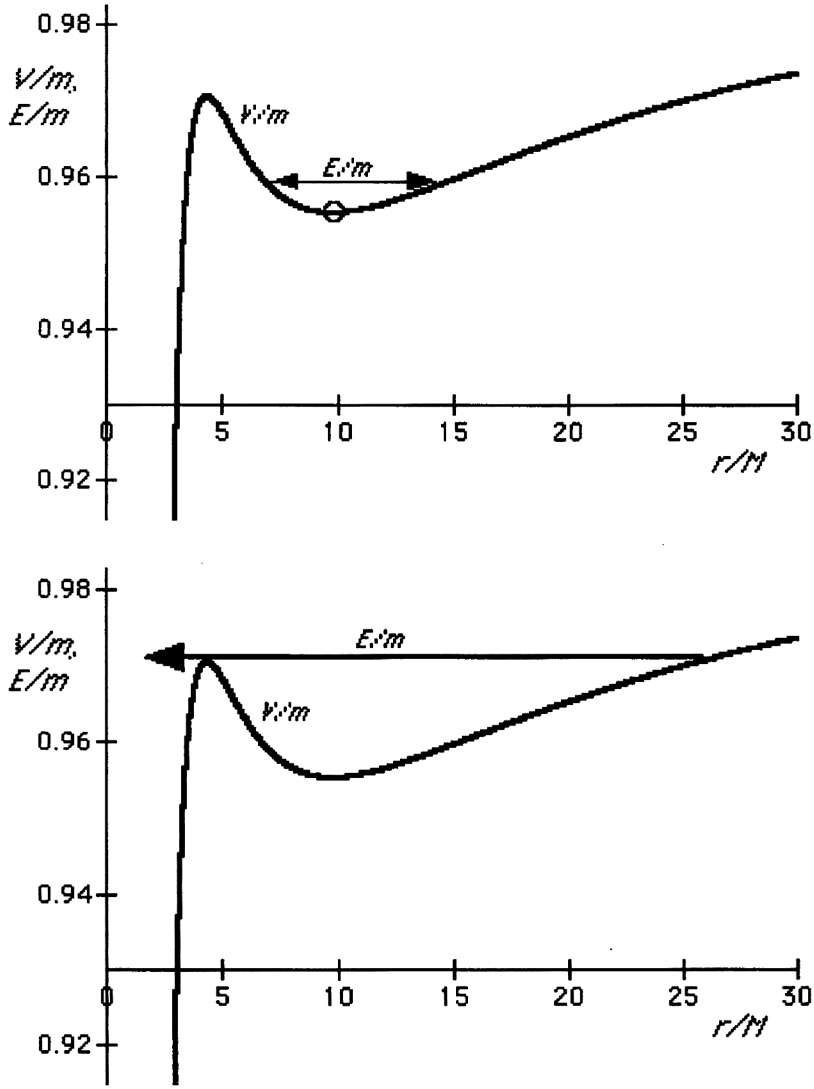


図 4.8　コンピュータプロット：角運動量 $L/m = 3.75M$ でブラックホールを軌道運動する物体の有効ポテンシャル曲線-半径図。有効ポテンシャルや粒子エネルギーはともに縦軸の値で測られる。粒子エネルギーは半径が変わっても変化せず、運動の定数である。結果として、エネルギーと位置のプロットは水平線になる。上図：粒子のエネルギーがポテンシャルの最小値ならば（白丸で表される点）、粒子は一定の半径に留まったままであり、ブラックホールの周りの円軌道上を運動する。それよりも少し大きなエネルギーならば（左右の矢印のついた線）、粒子は半径を前後に振動し、中心の周りを軌道回転する。下図：粒子が下図の左のポテンシャルの最大値よりもわずかに大きなエネルギーでやってくると、半径運動はゆっくりになり、ピークでゼロになり、ブラックホールをほとんど円軌道し、図 4 に描かれた軌道の最終

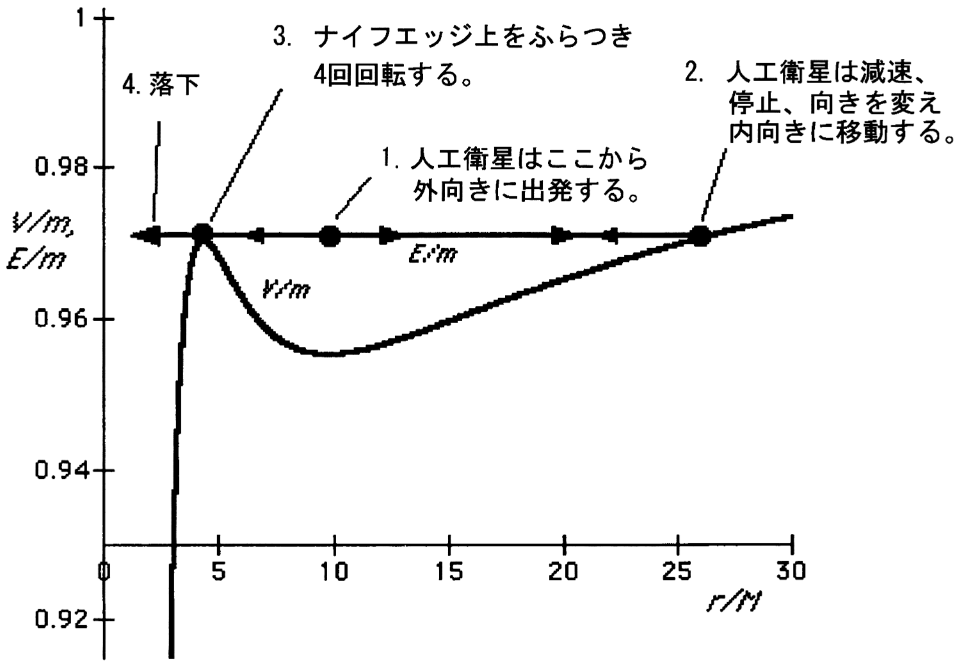


図 **4.9** コンピュータプロット：$L/m = 3.75M$ に対する図 **4** に表された軌道の粒子の有効ポテンシャル。図 **4** の運動の半径成分を追跡するために、図のステップ **1** から **4** にしたがった。

$$\left(\frac{V(r)}{m}\right)^2 \equiv \left(1-\frac{2M}{r}\right)\left[1+\frac{(L/m)^2}{r^2}\right] \tag{4.32}$$

有効ポテンシャルの 2 乗は二つの単純な因数の積である。第一の因数は引力の質量 M と r 座標に全体的に依存しており角運動量には全くよらない。2 番目の因数は質量によっておらず、人工衛星の単位質量当たりの角運動量 L/m と r 座標にのみに依存している。

明らかに (4.31) 式には 2 つの困難がある：
第一の困難：(4.31) 式は単位質量当たりの全エネルギーの2乗の差である。なぜ 2 乗なのか。ニュートンの式 (4.29) の場合のように、なぜ、単位質量当たりの全エネルギーと単位質量当たりの有効ポテンシャルの間の単純な差ではないのか。
第二の困難： 半径 r が非常に大きくなると、$V(r)/m$ の 2 乗である (4.32) 式は 1 になる。それに対して (4.28) 式のニュートンの有効ポテンシャル V/m は、ニュートン力学の定義ではそうでなければならないように、r が大きくなると 0 に近づく。

有効ポテンシャルのこれらの 2 つの性質は相対論の特徴である。まず、二つ目の異論をとり

上げると、無限遠で静止した粒子の全エネルギーは $E = m$ であり、$E/m = 1$ となる。したがって無限遠で静止している粒子に対して、単位質量当たりの有効ポテンシャルエネルギーも 1 にならなければならず（$r \to \infty$ のとき $V/m \to 1$）、そのときの (4.31) 式の右辺の 2 乗の差は（$dr/d\tau$ の 2 乗になる）0 のままである。それに対して、ニュートンの有効ポテンシャルは大きく離れたところで任意に 0 にすることができる。本質的に、相対論の公式は以前任意の定数だったものに新しい単位 1 を与える。
(4.31) 式における差に関して言えば、一般相対論ではエネルギーを別々の形に分けることができない。初めのところでそう述べた。静止エネルギーや位置エネルギー、運動エネルギーがすべて E の項の中に より大きな統一体としてまとめられる。したがって、我々は (4.32) 式で定義される $V(r)$ が実際のポテンシャルエネルギーになっていると断言することができない。その代わり、粒子の軌道の半径成分を視覚化するのに役立つ量だと言ってもよいだろう。だから「有効ポテンシャル」なのである。この語は、(4.31) 式の 2 乗の差を説明しているのではなく、個々の項の解釈がニュートンの場合と違うということを示しているのである。

半径方向の速さの測定の可視化

図 8 で、同じグラフ上で V/m と E/m を同時にプロットすることにより、(4.31) 式で予測しているように、半径方向の速さの測定量がわかる。この図で r の値に対して E/m 直線と V/m 曲線の間の鉛直方向の差が大きくなればなるほど、その r の値における粒子速度の半径成分は大きくなる（鉛直方向の差から粒子が内向きにまたは外向きに運動しているかどうかはわからない）。特に二つの線が触れると半径方向の運動はゼロになる。

「ナイフエッジ」軌道

ブラックホールの周りの軌道について決定的に新しい性質が図 8 の下図に示されている。粒子が有効ポテンシャルよりもわずかに大きなエネルギーを持っているとしよう。そして、このピークに対応する半径に螺旋運動をしながら進むと、半径運動は遅くなっていき、ほとんど 0 の値に近づいていく。半径方向のゆっくりとした運動は軌道面内でほとんど円運動に近いものになる。厳密に、このような運動は図 4 で見た人工衛星の軌道で r 一定値の部分になる。そして中心に動いていた粒子はほとんど円の「ナイフエッジ」軌道を描くようになり、その後ブラックホールに突っ込む。しかし、いま我々は図 9 の有効ポテンシャルを一目見てこの結果を予測することができる。有効ポテンシャルのバリアの頂点は運動に使えるエネルギーよりもわずかに低い所にある。したがって人工衛星がこの点に来たとき、中心に向かう運動がゆっくりになっても驚きに値しない。そして、また暗黒の運命へと突き進むというのも驚くべきことでない。明らかに、軌道についての興味深い定性的な特徴はすべて有効ポテンシャルを見れば一目でわかる。軌道を計算するまでもないのだ。

一つの有効ポテンシャルに対して異なったエネルギーをもつ根本的に違う軌道。

有効ポテンシャルには、与えられた m と M, r に対して、人工衛星の角運動量だけに依存し、エネルギー E には全く無関係だというすばらしい性質がある。したがって球対称な質量中心の影響のもとで、人工衛星が経験するあらゆる種類の運動を予測するためには、人工衛星の角運動量の値と有効ポテンシャルの値を知るだけで十分である。エネルギー E の値が角運動量に対して、いろいろ変わると、図 11（176 ページ）で説明したように軌跡の形が劇的に変わる。図 11 の真中のボックスから、有効ポテンシャルの曲線と

エネルギーの間の関係を一目見ただけで、すべてこれらの軌道の詳細を把握することができる。

図 12（176 ページ）で、同じ角運動量の場合について、ニュートンの有効ポテンシャルとブラックホールの有効ポテンシャルを比較した。束縛された人工衛星では、ブラックホールの有効ポテンシャルの方が奥深いところまで進むことができる。小さい半径での「滞在時間」はこの図から明らかではないが、軌道の長軸の回転に費される。

円軌道は人工衛星のエネルギーが有効ポテンシャルの最小値に位置し、落ち着ける場所である。178 ページの図 13 に、いくつかの角運動量の有効ポテンシャルの最小値にある円軌道を示した。この図では、安定な円軌道の半径の最小値が $r = 6M$ にあることを示している。詳しくはこの章の終わりの練習問題を見よ。

有効ポテンシャルの最小値から円軌道。

これらの軌道はアインシュタインの標準的な幾何学的重力理論に源を発している。しかしながら、4.6 節で調べたように、ニュートン力学の有効ポテンシャルを使用することで予測できるものもある。

4.8 まとめ

球対称な中心近くにおいて自由物質粒子の運動をどうやったら予測することができるか？ 極値的加齢の原理とシュワルツシルト計量から、2 つの運動の定数、角運動量 L とエネルギー E が得られる：

$$\frac{L}{m} = r^2 \frac{d\phi}{d\tau} \tag{4.2}$$

$$\frac{E}{m} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} \tag{4.3}$$

上の 2 つの式には腕時計時間の増分 $d\tau$ があることに注意する。

これらの式とシュワルツシルト計量から、固有時 $d\tau$ の関数として $dr, d\phi, dt$ を表すことができる（162 ページの (4.20) 式、(4.21) 式、(4.22) 式）。一旦、エネルギー E と角運動量 L がわかると、これらの式から計算機を使って各ステップごとに物質粒子の軌道を数値解として求めることができる。たとえば、球殻から打ち上げられた物体の初期速度と方向から E と L の値を計算することができる（例題 3）。

ブラックホールの周りの軌道は、ニュートン力学によって予測されたものとは全く違っている。たとえば、人工衛星は遠い距離からさっとやってくるかもしれないが、そして 1 回または数回円を描き、もう一度遠くへ飛び去るか、ブラックホールに飛び込んでしまう（158 ページの図 4）。別の例として、ずっと遠くにある人工衛星はほぼ楕円軌道上を動くが、長軸の方向が時間とともに変化する（176 ページの図 11 の場合 2）。これが水星の軌道に起きているのだ（プロジェクト C 「水星の近日点移動」）。

これらの効果、そしてそれ以上のものが、半径方向の運動、エネルギー E といわゆる

例題 2 ブラックホール近くからの脱出（再考）

160 ページの例題 1 は「半径 $r_0 = 10M$ の球殻の指令官が人工衛星を水平（つまり外向き半径方向から 90°）に $v_{0\ \mathrm{shell}} = 0.500$ の速さで発射させる。これらの量はともに局所球殻時計と物差しで測定した値である。人工衛星の単位質量当たりの角運動量 L/m はいくらか。単位質量当たりのエネルギー E/m はいくらか。この人工衛星は遠い距離に脱出できるか」であった。そこでこれらの 2 つの質問に答えてもらった。ここでは 3 番目の問題に戻ろう。「この人工衛星は遠くに脱出できるか」

解答

例題 1 で、$L/m = 5.775$ と $E/m = 1.033$ であることがわかった。さて、中心からまっすぐ外側へ（角運動量は 0）打ち上げられた粒子は、ブラックホールから非常に遠くに離れたところへ難なくたどり着き、静止するだろう。この問題の人工衛星がわずかに大きなエネルギー $E/m = 1.033$ で外に向けてまっすぐ打ち上げられるなら、遠く離れたところに到達しても運動エネルギーは 0 でないだろう。それに対して、まっすぐ中心に向けて打ち込むと、どんなエネルギーでもブラックホールに呑み込まれてしまう。球殻観測者から見て外向きの半径方向から 90° へ発射した場合どうなるかよくわからない。人工衛星はブラックホールから脱出できるだろうか。

図 13 を使えばこの質問に答えることができる。$E/m = 1.033$ の水平の破線を見よ。角運動量の値 $L/m = 4.33M$ でこの線に沿って内向きに進んでいた粒子が、向きを変えて外に向けて進んでいくことに気をつける。図の角運動量に対する曲線の変化から、大きな角運動量の値 $L/m = 5.775M$ ではポテンシャルバリアはずっと大きくなることがわかる。よって $E/m = 1.033$ のエネルギーと $L/m = 5.775M$ の人工衛星は有効バリアをつっきってブラックホールへ落ちることはないだろう。その代わり、無限遠に向けて脱出していくだろう。さらに別の質問：これらの数値のとき、1 度落下して戻って行くのか。落下せずに外に向かって行くのか。

有効ポテンシャル V の関係式を使うと、すぐに簡単に予測できる：

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \left(\frac{E}{m}\right)^2 - \left(\frac{V}{m}\right)^2 \tag{4.31}$$

ここで有効ポテンシャルの 2 乗は

$$\left(\frac{V(r)}{m}\right)^2 \equiv \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left[1 + \frac{(L/m)^2}{r^2}\right] \tag{4.32}$$

で定義される。

十分大きな角運動量 L では、この有効ポテンシャルのプロットから、中間の半径で極小値をとり、さらに小さな半径で極大値をとり、粒子が $r = 2M$ の地平線に近づくと、0 に飛び込むことがわかる。人工衛星時間に対する r の変化率は (4.31) 式にしたがい、軌道の本質的な特質がすぐ視覚的に予測される（176 ページの図 11）。特に、有効ポテンシャルの最小値と同じエネルギーをもつ人工衛星は半径を変えず、円軌道上を動く（円軌道についてはこの章の練習問題で）。

例題 3 球殻速度から角運動量とエネルギー

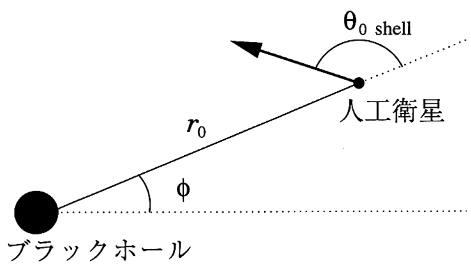


図 4.10 初期条件の説明図。方位角 ϕ と球殻系で測定される発射角 θ_0 の間の差を示す。

換算円周 r_0 の球殻の指令官が、半径方向外向きに初期角度 $\theta_{0\ \mathrm{shell}}$ で質量 m の人工衛星を速さ $v_{0\ \mathrm{shell}}$ で打ち上げる。速さと角度をともに局所球殻系の物差しと時計で測る。人工衛星の角運動量を求めよ。そのエネルギーはいくらか。

解答

この問題に解答できれば、球殻系で測定する人工衛星の初期速度から角運動量 L/m と無限遠で測ったエネルギー E/m を計算できるようになる。

図 10 では、球殻系で測った発射角 $\theta_{0\ \mathrm{shell}}$ と軌道上の人工衛星を追尾する方位角 ϕ を区別している。

人工衛星は初期速度 $v_{0\ \mathrm{shell}}$ で、外向きを基準として測った角度 $\theta_{0\ \mathrm{shell}}$ に打ち上げられる。ともに球殻観測者で測ったときである。人工衛星の速度の方位角成分 v_ϕ は

$$v_\phi = r_0 \frac{d\phi}{dt_{\mathrm{shell}}} = v_{0\ \mathrm{shell}} \sin\theta_{0\ \mathrm{shell}} \tag{4.33}$$

である。角運動量 L ((4.2) 式) を計算するために、(4.33) 式の微分の分母を dt_{shell} の代わりに固有時 $d\tau$ を使いたい。$d\tau$ を求めるため、人工衛星から発光された 2 つのフラッシュの間隔を考えよう。dt_{shell} と $d\tau$ の間の関係は特殊相対論の時間の伸びの式である：

$$\frac{dt_{\mathrm{shell}}}{d\tau} = \gamma_{0\ \mathrm{shell}} = \left(1 - v_{0\ \mathrm{shell}}^2\right)^{-1/2} \tag{4.34}$$

人工衛星の角運動量はこれまでの 2 つの式から得られる：

$$\begin{aligned}\frac{L}{m} &= r_0^2 \frac{d\phi}{d\tau} = r_0 \frac{dt_{\mathrm{shell}}}{d\tau}\left(r_0 \frac{d\phi}{dt_{\mathrm{shell}}}\right)\\ &= r_0 \gamma_{0\ \mathrm{shell}} v_{0\ \mathrm{shell}} \sin\theta_{0\ \mathrm{shell}}\end{aligned} \tag{4.35}$$

角運動量の最後の形には簡単な解釈がつけられる。角運動量はふつうベクトル積の形 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ をとり、その大きさは $L = rp \sin\theta_{0\ \mathrm{shell}}$ である。ここで p は特殊相対論の形 $p = \gamma m v$ である。この場合は、球殻の量 θ, γ, v を使っている。エネルギーを計算するために、人工衛星時間に対する腕時計時間の比 $dt/d\tau$ の値が必要となる。球殻時間 t_{shell} と遠方時間 t の関係はこの本の終わりにある公式集の (C) 式から得られる：

$$\frac{dt}{dt_{\mathrm{shell}}} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2} \tag{4.36}$$

これらの式とエネルギーの定義 (4.3) 式からエネルギーの形を求めよ：

$$\begin{aligned}\frac{E}{m} &= \left(1 - \frac{2M}{r_0}\right)\frac{dt}{d\tau}\\ &= \left(1 - \frac{2M}{r_0}\right)\frac{dt}{dt_{\mathrm{shell}}}\frac{dt_{\mathrm{shell}}}{d\tau}\\ &= \left(1 - \frac{2M}{r_0}\right)\left(1 - \frac{2M}{r_0}\right)^{-1/2}\gamma_{0\ \mathrm{shell}}\\ &= \left(1 - \frac{2M}{r_0}\right)^{1/2}\gamma_{0\ \mathrm{shell}}\end{aligned} \tag{4.37}$$

(4.35) 式と (4.37) 式から、半径 r_0 の球殻観測者によって測られる初期速度と運動の角度から人工衛星の角運動量 L とエネルギー E が求められる。角度 ϕ と半径 r がどのように進むかを記述する (4.21) 式と (4.22) 式のおかげでエネルギーと角運動量から全体的な軌道の形が決められる。

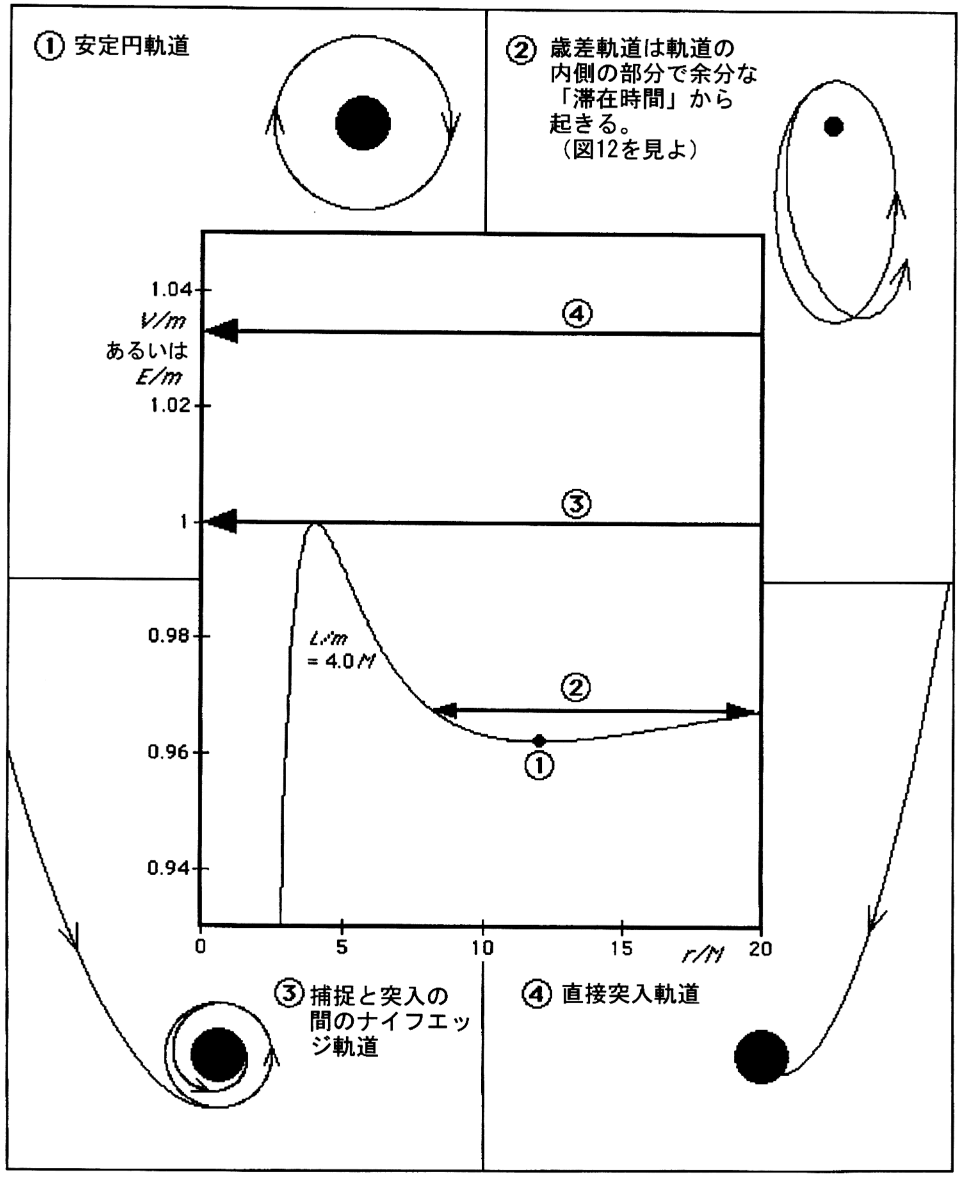


図 4.11　コンピュータプロット：一目で予測できる軌跡。角運動量 L/m の特別な値に対する有効ポテンシャル V/m のプロットと全エネルギー E/m の値から、ブラックホールを回る、または吸い込まれる粒子の軌跡をすぐに予測できる。図の中心に、一つの有効ポテンシャルに対して 4 つのエネルギーの場合が番号で表されており、それぞれに対応する軌跡が図の四隅に配置されている。

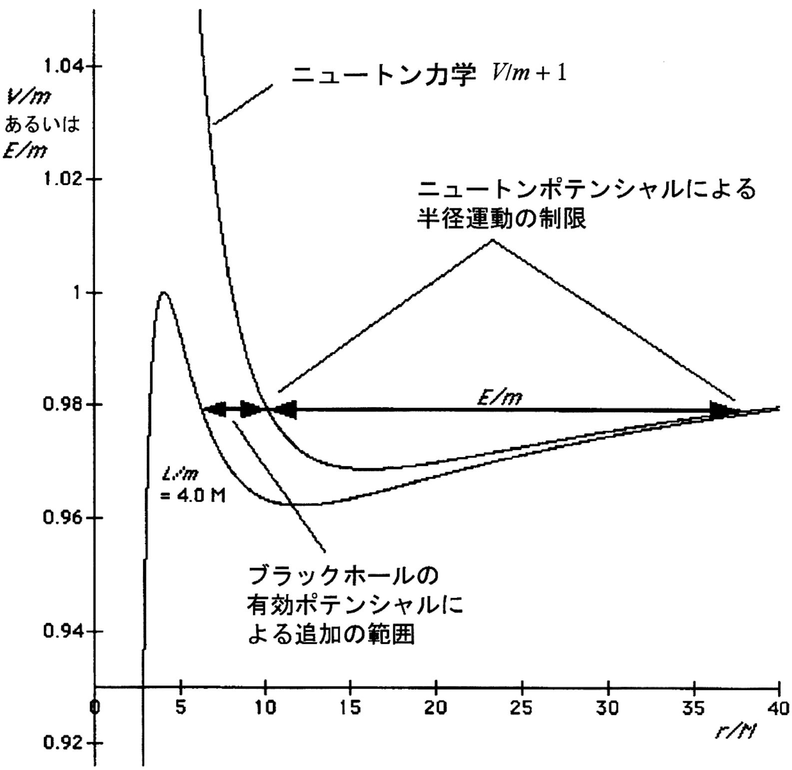


図 **4.12**　コンピュータプロット：図 **11** の **2** の場合を詳しく説明した。ブラックホールの有効ポテンシャルとそれに対応するニュートン力学の有効ポテンシャル（大きな半径で止まっている粒子に対して静止エネルギー $E/m = 1$ を付加するためにニュートンの図には 1 が加えられている）。これらの曲線はともに角運動量が $L/m = 4.0M$ である。ニュートンの場合、半径方向の移動は楕円軌道になる。それに対して、一般相対論ではもっと小さい半径 r まで行けると予測する。軌道運動する人工衛星は半径の小さいところで、ニュートン力学が予測するよりも長い時間を費す。これは有効ポテンシャルの図から直接わかるものではない。軌道の内側の端近くの「滞在時間」の間、軌道上の他の場所でもそうだが、角運動量保存にしたがって角度 ϕ は変わり続ける。結果として、ニュートン力学が同じ角度で最大半径に達するという予測とは違い、最大半径の角度は変わり、楕円軌道の長軸の方向が変化することになる（図 **11** の **2** の場合）。水星では、この効果によって軌道の長軸が **1** 世紀当たりほぼ 43 秒角（0.0119 度）進む（次の章のプロジェクト **C**）。

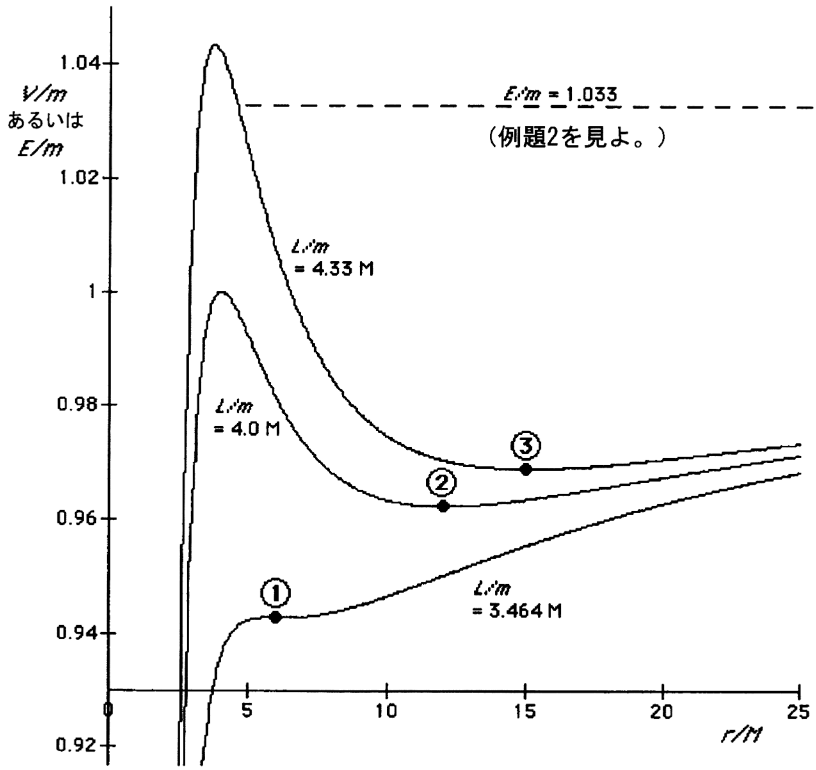


図 4.13　コンピュータプロット：いろんな円軌道の半径 (①, ②, ③)。それぞれ有効ポテンシャルの極小値の半径にある。安定円軌道の最小半径は $r = 6M$ にある。より詳しくは、この章の練習問題を見よ。ロケット噴射を使用すれば、 $r = 6M$ から $r = 2M$ まで探査することができる。しかし、この領域では安定な円軌道上にいることはできない。

私は仮説をつくらない。

これまで、われわれは天空とわれわれの［地球上の］海の諸現象を重力によって説明してきたのであるが、この力の原因をまだ指定していなかった。たしかにその力はある原因から生ずるものでなければならない。それは、その力を太陽や惑星の中心まで少しも減少されることなく透入させ、また（ふつう機械的な原因がそうであるように）物体の各微小部分の表面［積］の大きさに従って作用させるのではなく、それが含む立体的物質の量に従って作用させ、かつその効果を常に距離の 2 乗の逆比に従って減少させながら、あらゆる方向に、しかも広大な距離にまで伝えるよう

な、そういったものなのである。太陽に向かう重力は、太陽の実質を構成する各微小部分へと向かう重力の合成したものであって、太陽から遠ざかる際には、それから土星の軌道の遠きに至るまで、距離の 2 乗に正確に逆比例して減少することは諸惑星の遠日点の静止から明らかに見られるとおりである。いや、さらに諸彗星の最も遠い遠日点に至るまで、もしそれらの遠日点が静止しているならば、このことがいえる。しかし、私はいままでに重力のこれらの諸性質の原因を、じっさいの諸現象から発見することはできなかった。そして私は仮説をつくらない。というのは、じっさいの現象から導き出されないものはすべて仮説とよばれるべきものだからである。そして仮説はそれが形而上的なものであれ、形而下的なものであれ、また神秘的性質のものであれ、力学的なものであれ、実験哲学においては何らの位置を占めるものではないからである。この哲学では、特殊の命題がじっさいの諸現象から推論され、のちに帰納によって一般化されるのである。このようにして物体の不加入性、可動性および衝撃力、また運動の法則や重力が発見されたのである。そしてわれわれにとっては、重力がじっさいに存在し、かつわれわれがこれまでに説明してきた諸法則に従って作用し、かつ天体とわれわれの［地球上の］海のあらゆる運動を説明するのに大いに役立つならば、それで十分である。

—ニュートン（Isaac Newton）1713 年頃

4.9 参照文献と謝辞

この章の初めのエミリ・ディキンスンの詩は岩田典子著『エミリ・ディキンスンを読む』（思潮社、1997 年）の 228 ページからである。

155 ページの引用について：第一の引用はアウグスチヌス。引用元は不明。二番目は *Confessions* から。Alan L. MacKay 編集 *A Dictionary of Scientific Quotations*（Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia, 1991 年）の 17 ページ。Giordano Bruno, *The Candle Bearer,* 1582, Charles Lamb, Letter to Thomas Manning, 2 January 1806, *A Dictionary of Scientific Quotation,* 145 ページ。Søren Kierkegaard, *Journals and Papers,* 1843 年。H. D. Thoreau, *Walden*（1854）. 日本語訳は、飯田実訳『森の生活 上』（岩波文庫、1995 年）の 17 ページと 176 ページ。Isaac Newton, Scholium to Definition 8 at the beginning of *Principia Mathematica.* 日本語訳は、中野猿人／訳・注『プリンシピア—自然哲学の数学的原理』（講談社、1977 年）の 20 ページ。Charles W. Misner, Kip S. Thorne, and John Archibald Wheeler, *Gravitation,* W. H. Freeman and Company, San Francisco（現在 New York）, 1973. George Burns, New York Times, 23 August 1993, A14 ページ。John Archibald Wheeler, *American Journal of Physics,* Volume 46, 323 ページ（1978）。Barbara Stanwyck, *A Dictionary of Scientific Quotations,* 229 ページ。

161 ページの引用は Wolfgang Rindler, *American Journal of Physics*, Vol. 60, No.

10, 893 ページからである。

最後の引用は Isaac Newton の *Mathematical Principles of Natural Philosophy and His System of the World,* 日本語訳は、中野猿人／訳・注『プリンシピア—自然哲学の数学的原理』（講談社、1977 年）の 651-652 ページ。

Lester Clendenning はこの章の練習問題の円軌道の分析を簡略化するのを手伝ってくれた。

第4章の練習問題

1. 円軌道の 3 つの視点

半径 r の球殻観測者が、速さ v_{shell} で通り過ぎる自由浮遊系観測者と測定値を比べる。これらを比較するときには特殊相対論の法則が使えると仮定する。つまり、局所的にローレンツ変換を使うことができ、球殻系を「実験室」と呼び、自由浮遊系を「ロケット」と呼び、相対速度を v_{shell} とする。「実験室」(球殻) 系に対する「ロケット」系の方向がローレンツ変換に対する相対速度の方向と一致し x 軸となるように慎重に選べ。

ここで、ブラックホールの周りを半径 r の円運動する質量 m の推進力のない (自由浮遊する) 宇宙船を考えよう。このロケットは半径 r の球殻を速さ v_{shell} で飛ぶ。

A. 軌道上の物体は一周し、同じ球殻時計のところに戻って来る。この球殻時計が測る周期 T_{shell} を v_{shell} で表せ。

B. 球殻を完全に一周する間、軌道運動する時計は特殊相対論のふつうの伸びの因子 γ 倍「ゆっくり進む」と仮定する。球殻時計のところに戻って時間を比べることでゆっくり進んでいることがわかる。円軌道上の時計が記録する場合、次々に通り過ぎる球殻時計上の時間経過 T_{orbiter} を v_{shell} で表すと、いくらになるか。

C. 宇宙船の単位質量当たりの角運動量を v_{shell} で表せ。(答えは rv_{shell} ではない)

D. 記録係が軌道の 1 周にかける時間 T_{bkkpr} を記録する。それを v_{shell} で表すといくつになるか。

E. 後の練習問題で、安定的な円軌道の最小半径が $r = 6M$ であり、この軌道上で人工衛星が速さ $v_{\mathrm{shell}} = 0.5$ (光速の半分) で運動することがわかる。中心に質量 $M = 5000$ メートルのブラックホール アルファがあると仮定する。球殻観測者と軌道観測者、記録係に対して軌道 1 周と L/m の値は有効数字 1 桁で以下の数値になる。

$$T_{\mathrm{shell}} \approx 4 \times 10^5 \text{ メートル}$$
$$T_{\mathrm{orbiter}} \approx 3 \times 10^5 \text{ メートル}$$
$$L/m \approx 2 \times 10^4 \text{ メートル}$$
$$T_{\mathrm{bkkpr}} \approx 5 \times 10^5 \text{ メートル}$$

これらの時間と L/m の値を有効数字 3 桁まで求めよ (この軌道上の観測者はほぼ 1 ミリ秒で 1 周する)。

2. ブラックホールの周りの円軌道の半径

注：練習問題 2 から 8 は互いに関連している。これらの練習問題は前問の答えを必要とする。

以下の質問に答えるか、または別の方法を使い、人工衛星の角運動量の関数としてブラックホールの円軌道の半径を求めよ。

物体の単位質量当たりの角運動量 L/m は既知である。この L/m の値は、あらゆる r 座標の値に対して、有効ポテンシャル (4.32) を決めてしまう。もし粒子のエネルギーが有効ポテンシャルの極小値と等しいならば、粒子は安定な円軌道上を動く（例：図 13 の数字の下のドット)。もし粒子エネルギーが有効ポテンシャルの極大（図 8, 9, 11, 12 の有効ポテンシャルのバリアのピーク）と等しければ、円軌道は不安定になる。不安定軌道の人工衛星は先端でバランスをとる鉛筆のようであり、もしわずかに揺らされればこの軌道から外れていくだろう。

A. (4.32) 式の有効ポテンシャルの 2 乗の式から始める：

$$\left[\frac{V(r)}{m}\right]^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left[1 + \frac{(L/m)^2}{r^2}\right] \tag{4.38}$$

アステリスクの付きの無次元量に変換することで計算を簡単にすることができる：

$$\begin{aligned} V^* &\equiv \frac{V(r)}{m} \\ r^* &\equiv \frac{r}{M} \\ L^* &\equiv \frac{L}{mM} \end{aligned} \tag{4.39}$$

（エネルギーに対して選ぶ単位が何であれ m が人工衛星の質量であり、M がブラックホールの質量であることを思い出せ）これらの無次元の量を使うと有効ポテンシャルの 2 乗が

$$V^{*2} = \left(1 - \frac{2}{r^*}\right)\left(1 + \frac{L^{*2}}{r^{*2}}\right) \tag{4.40}$$

になることを示せ。

B. この（2 乗した）有効ポテンシャルを r^* で微分して 0 とおくことにより、最大と最小を求めよ（正値の関数の極大または極小は関数の 2 乗の極大または極小と同じ座標になる)。結果が

$$r^{*2} - L^{*2}r^* + 3L^{*2} = 0 \tag{4.41}$$

となることを示せ。

C. この式を円軌道の半径 r^* について解け。結果が

$$r^* = \frac{L^{*2}}{2}\left[1 \pm \left(1 - \frac{12}{L^{*2}}\right)^{1/2}\right] \tag{4.42}$$

または通常の単位で

$$r = \frac{(L/m)^2}{2M}\left[1 \pm \left(1 - \frac{12M^2}{(L/m)^2}\right)^{1/2}\right] \tag{4.43}$$

と書けることを示せ。

正の符号をとると有効ポテンシャルの極小値の半径になり、したがって、安定な円軌道になる。負の符号を選ぶと有効ポテンシャルが極大をとる半径となり、不安定な円軌道の半径となる。図 8, 9, 11 を参照せよ。(任意の問題：V^{*2} を r^* について、2 度微分し、r^* における微分係数が正または負になるかを調べ、極大または極小であることを確かめよ)。

D. 角運動量が $L/m < (12)^{1/2}M$ ならば、どんな円軌道も存在しないことを示せ。最小の角運動量 $L/m = (12)^{1/2}M$ では、円軌道の半径が $r = 6M$ であることを示せ。これが最も小さい安定な円軌道である。図 13 の 1 の場合である。

3. 円軌道上での人工衛星の速さ

円軌道上の人工衛星の速さを計算せよ。人工衛星の速さとして、(1) 軌道と同じ換算円周の球殻にいる観測者が測るとき、(2) 人工衛星中の観測者が測るとき、(3) シュワルツシルト記録係が観測記録を基に計算するときを考える。

A. 球殻観測者によって測られる人工衛星の速さを求めよ。人工衛星の中で時計が固有時 $d\tau$ の間隔でカチッと鳴ったとしよう。この事象は球殻系で時間 dt_{shell}, 距離 $rd\phi$ 離れている。dt_{shell} と $d\tau$ の関係は特殊相対論を使うとちょうど

$$dt_{\text{shell}} = \gamma_{\text{shell}} d\tau = (1 - v_{\text{shell}}^2)^{-1/2} d\tau \tag{4.44}$$

となる。角運動量を知ることで、球殻の速さを計算できる：

$$\begin{aligned} v_{\text{shell}} &= \frac{rd\phi}{dt_{\text{shell}}} = (1 - v_{\text{shell}}^2)^{1/2}\frac{r^2 d\phi}{rd\tau} \\ &= (1 - v_{\text{shell}}^2)^{1/2}\frac{L/m}{r} = (1 - v_{\text{shell}}^2)^{1/2}\frac{L^*}{r^*} \end{aligned} \tag{4.45}$$

この式から

$$v_{\text{shell}}^2 = \frac{1}{\dfrac{r^{*2}}{L^{*2}} + 1} \tag{4.46}$$

を示せ。

(4.41) 式から

$$\frac{r^{*2}}{L^{*2}} = r^* - 3 \tag{4.47}$$

を示せ。

これを (4.46) 式に代入することによって

$$\begin{aligned} v_{\text{shell}}^2 &= \frac{1}{r^* - 2} = \frac{M}{r - 2M} \\ &= \frac{M}{r\left(1 - \dfrac{2M}{r}\right)} \end{aligned} \tag{4.48}$$

を示せ。

B. 安定な円軌道の最小半径が $r = 6M$ であることを思い出そう（練習問題 2 の D)。この最小安定軌道での速さ v_{shell} を求めよ（不安定な円軌道の最小半径が $r = 3M$ であることを練習問題 6 で示すことになるだろう)。

C. 人工衛星の観測者によって測られる球殻通過速度が、球殻観測者によって測られる人工衛星の速さと同じであることについて議論せよ。

D. 遠方のシュワルツシルト記録係によって記録される人工衛星の速さを以下にしたがって求めよ。角運動量の式を使ってシュワルツシルト計量の $d\tau$ を $d\phi$ で置き換えよ。シュワルツシルト記録係が記録する方位角方向の速さ $v_{\text{bkkpr}} = rd\phi/dt$ を求めよ。

$$v_{\text{bkkpr}}^2 = \frac{1 - \dfrac{2M}{r}}{\left(\dfrac{mr}{L}\right)^2 + 1} = \frac{1 - \dfrac{2}{r^*}}{\dfrac{r^{*2}}{L^{*2}} + 1} \tag{4.49}$$

(4.47) 式を使って (4.49) 式を簡単にせよ：

$$\begin{aligned} v_{\text{bkkpr}}^2 &= \frac{1 - \dfrac{2}{r^*}}{r^* - 2} = \frac{1 - \dfrac{2}{r^*}}{r^*\left(1 - \dfrac{2}{r^*}\right)} \\ &= \frac{1}{r^*} = \frac{M}{r} \end{aligned} \tag{4.50}$$

（練習問題 6 で、不安定円軌道に対して $3M \le r < 6M$ であることを示す）

余談：(4.50) 式は、この本の終わりの公式集の (C) 式と、(4.48) 式を使うと直接得られる。(C) 式は、球殻で静止している時計に対する球殻時間と記録係時間を関係づける：

$$dt_{\text{shell}}^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 \tag{4.51}$$

円軌道の速さには 2 つの表現があることを知ろう：

$$v_{\text{shell}} = \frac{rd\phi}{dt_{\text{shell}}} \tag{4.52}$$

$$v_{\text{bkkpr}} = \frac{rd\phi}{dt} \tag{4.53}$$

ともに分子は $rd\phi$ で同じである。では分母を見よう。v_{shell} の分母の球殻経過時間は同じ半径 r の球殻にある 2 つの時計で記録される。したがって、これら 2 つの時計は同期化することができ、あたかも 1 つだけの球殻時計で記録しているとみなすことができ、dt_{shell} と dt の間の関係は (4.51) 式と同じ結果になるだろう。

E. 安定円軌道の最小半径にある人工衛星の記録係の速さはいくらか。

4. ニュートンの円軌道

ニュートンの予測する円軌道とアインシュタインの円軌道がどんな環境のもとなら、区別できなくなるだろうか。以下の道筋にしたがうか、または別の方法を使ってこの質問に答えよ。

A. 165 ページの (4.28) 式から始めて、安定軌道の半径に対する (4.43) 式と似たニュートンの式を求めよ。

B. 安定軌道における r の一般相対論的な予測の (4.43) 式を

$$r = r_{\text{Newt}}(1+q)$$

の形で計算し直せ。ここで、r_{Newt} はニュートン力学が予測する軌道の半径で、q は小さい量である。この形は、同じ単位で表したとき、L/m のニュートンの式と相対論の式の差を無視している。この本の終わりの公式集の近似式 (E) を使い、M と r_{Newt} を用いて q の簡単な代数表現を 求めよ。

C. ニュートンとアインシュタインの両方に十分よくしたがっているぎりぎりの半径の基準を $q = -0.01$ と定める。この近似が正しいとみなせる半径のうち最小値 r_{min} を求めよ。結果は M の何倍か。

D. 太陽に対する r_{min} の数値をメートルの単位で求め、太陽の半径と r_{min} を比べよ。

E. 水星の軌道半径に対して q の値はいくらか。水星の軌道は地球の平均半径の 0.387 倍である（巻末公式一覧の物理定数表を見よ)。

5. 惑星運動のケプラーの法則

ヨハネス・ケプラー (Johannes Kepler 1571–1630) はティコ・ブラーエ (Tycho Brahe) が観測して集めた惑星運動の膨大なデータから、 **惑星軌道の三法則**を推論し、力学の歴

史に画期的な功績を残した。

1. 惑星は太陽を焦点として楕円軌道を描く。
2. 太陽からどの惑星に伸ばした半径ベクトルも同じ時間内に同じ面積を掃く。
3. どんな惑星の周期の 2 乗も太陽からの平均距離の 3 乗に比例する。

A. ケプラーの第一法則はブラックホールの近くの軌道に対して正しくないことを示せ（ヒント：この章の図を見よ）。水星の軌道はこの法則からわずかにずれる（プロジェクト C の「水星の近日点移動」)。

B. 対称性について単純な議論によってブラックホールの周りの軌道についてケプラーの第二法則が正しいことを示せ。

C. (4.45) 式から、円軌道の周期の 2 乗が

$$T^2_{\text{bkkpr}} = \frac{(2\pi)^2}{M} r^3 \tag{4.54}$$

で与えられることを示せ。したがって、ケプラーの第三法則はブラックホールの周りの円軌道でも正しい。

D. ケプラーの第三法則は以下の式のべきからわかるように **1-2-3 法則**と呼ばれることがある。円軌道に対して

$$M \equiv M^1 = \omega^2 r^3 \tag{4.55}$$

を示せ。ここで、ω は記録係の角速度であり

$$\omega \equiv \frac{2\pi}{T_{\text{bkkpr}}} \tag{4.56}$$

によって与えられる。

6. 不安定円軌道の人工衛星の速さ

有効ポテンシャルの頂上でエネルギー E をもつ不安定円軌道についてもっと詳しく調べよう。人工衛星がこのような軌道に安心して留まれるようにするために、つまりこのピークのナイフエッジ軌道にい続けるために、小さい自動制御装置を使ってロケットを噴射させる必要がある。

A. 不安定円軌道の半径として (4.42) 式でマイナスを選ぼう：

$$r^* = \frac{L^{*2}}{2}\left[1 - \left(1 - \frac{12}{L^{*2}}\right)^{1/2}\right] \qquad \boxed{\text{不安定}} \tag{4.57}$$

($r^* = r/M$ で $L^* = L/(mM)$ を思い出せ）人工衛星の速さに対して、(4.48) 式と (4.50) 式は (4.22) 式の（正負）符号の選び方と関係なく正しいことを示せ。

B. 不安定円軌道の最小の半径はいくつか。(4.48) 式を見よ。これを使えば、半径 r の球殻上の観測者が観測するとき、円軌道上の物体の速さがわかる。原理的にこの測定は実際に行うことができる。局所的な測定では、光速よりも速い物体は存在しないという不滅の要請から、この不安定円軌道に対する最小半径を求めよ。

C. 最初の方の式から、最小半径の不安定軌道上にある粒子の角運動量を求めよ。この角運動量が無限大であることを示せ。
議論：角運動量がどのようにして無限大になるのか。角運動量が $L = mr^2 d\phi/d\tau$ であることを思い出せ。固有時 $d\tau$ と球殻時間 dt_{shell} の関係は特殊相対論のふつうの時間の伸びの公式によって与えられる。人工衛星が光の速さに近づくと、腕時計時間、固有時 $d\tau$ は 0 になる。よって、ブラックホールを 1 周するのにかかる固有時は 0 である。$d\tau$ は角運動量の分母にあるので、角運動量 L は限りなく大きくなる。

D. 最小半径の不安定軌道に対して、シュワルツシルト記録係が計算する人工衛星の速さはいくらか。こんなことを言われても信じられないだろうが、シュワルツシルト記録係が計算すると、この人工衛星の最大の速さは光の速さになる。記録係の光の速さの値については第 5 章を見よ。

7. ブラックホールを使った時間旅行：安定円軌道

ブラックホールを回る安定な円軌道の時計、それにブラックホールから離れた遠方時計の進みの差を使うと、未来への時間旅行ができると言う。あなたは、この提案を審査するために集められた専門家の委員の 1 人である。以下の分析にしたがうか、あなたが考案した別の方法に基づいて、計画の実行性についてアドバイスをせよ。

A. ブラックホールを回る安定な円軌道上にある人工衛星の時計の刻みを考えよう。$d\tau/dt$ を求めたい。この比の分子は人工衛星系の時計の刻みである腕時計時間 $d\tau$ に等しく、分母はシュワルツシルト記録係によって記録される遠方時間の進み dt である。角運動量の式を使って、この場合のシュワルツシルト計量から $d\phi$ を消去し

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = \frac{1 - \dfrac{2M}{r}}{1 + \left(\dfrac{L}{mr}\right)^2} = \frac{1 - \dfrac{2}{r^*}}{1 + \left(\dfrac{L^*}{r^*}\right)^2} \tag{4.58}$$

を導け。(4.47) 式を使って

$$\frac{d\tau}{dt} = \left(1 - \frac{3}{r^*}\right)^{1/2} = \left(1 - \frac{3M}{r}\right)^{1/2} \tag{4.59}$$

を示せ。

B. 安定円軌道の最小半径 $r = 6M$ に対して、比 $d\tau/dt$ の値はいくらになるか。
C. ロケット時計の時刻と「実験室時間」が同じように進むためには、平坦な時空のロケットの速さはどうならなければならないか。
D. この分析に基づいて、ブラックホールの安定円軌道を使った時間旅行の提案に賛成して推進するか、それとも反対か。

8. ブラックホールを使った時間旅行：不安定円軌道

自動機器がロケットの噴射を制御することにより人工衛星を「ナイフエッジ」軌道上で安全に保つことができるという仮定のもとで、不安定円軌道を使うことにし、未来への旅行の提案（練習問題 7）を修正する。

A. 不安定円軌道の最小半径に対して、比 $d\tau/dt$ の値はいくらになるか。この結果に基づけば、ブラックホールの不安定円軌道を使った時間旅行の提案に賛成して勧めるか、それとも反対するか。
B. 図 13 の角運動量のいろいろな値に対する有効ポテンシャル曲線を一目見て、粒子を最小半径 $r = 3M$ の不安定軌道に置く。粒子の単位質量当たりの全エネルギー E/m の値について結論を導け。宇宙船がこのエネルギーで、ブラックホールからずっと離れているとき、時間の伸びの因子 γ_{far} はいくらになるか。この結果により、時間旅行にブラックホールの不安定円軌道を使うことについて判断は変わるか。

9. ブラックホールを使った方向転換

宇宙船エンタープライズ号は既知の質量 M のブラックホールに向けてまっすぐ突っ込む。キャプテンのあなたとしては、このブラックホールを使うことでロケット燃料の消費を最小限にとどめて、運動の方向を変えたい。図 11 を見て 3 の場合を使うことを決心するが、エネルギー E/m は有効ポテンシャルのピークの値よりも小さい。その結果、スターフリートアカデミーの多くの卒業生の命を奪ってきた危険なナイフエッジ軌道に入ることなく、即座に外側に向かうだろう。

A. エンタープライズ号がブラックホールに近づいて行くと、E/m の値は変化するか。
B. ブラックホールからずっと離れたところで、宇宙船の単位質量当たりの線形運動量を、宇宙船の E/m の関数として表すとどうなるか。ブラックホールに降りて行くと、宇宙船の線形運動量の値は変化するか。
C. ブラックホールの周りを進む宇宙船の単位質量当たりの角運動量の大きさを宇宙船の E/m で表すといくらになるか。図 3 を見よ。衝突パラメータ b を、ブラック

ホールの質量が 0 であれば、最も近づいていたであろう距離に選ぶ（さらに細心な b の定義については第 5 章の図 2 を見よ）。宇宙船が質量 M のブラックホールに進んで行くと、角運動量の値は変わるか。

D. エンタープライズ号の E/m の値が有効ポテンシャルのピークよりも大きくなると、あなたと乗組員には何が起きるか。

E. エンタープライズ号の E/m の値を変えたくない。ロケット燃料を大量に消費するからである。その代わり、ブラックホールに近づくときに、運動の方向をわずかに変えることによって、角運動量 L/m の値を変える。有効ポテンシャルのピークの上に E/m の値を持って行くのに必要な衝突パラメータ b の値はいくらか。

F. この練習問題で概観した計画の有効性を、星間往復旅行または未来への時間旅行に対するロケットの推進速度の変化と比べることによって説明せよ。平坦時空でロケットを使うことに比べて、ブラックホールを使うことで生じる複雑さは何か。

プロジェクト C

水星の近日点移動

- ニュートンとアインシュタインの間で水星軌道の不一致はどのくらいになるか。
- 理論と実験はどのようにしてどちらを選ぶのか。
- なぜ水星なのか。

この発見は、アインシュタインの科学者としての生活において、いや、一生涯で、何といっても最も強く感動した経験であった、と私は信じる。自然が彼に話しかけたのであった。彼は正しく理解しなければならなかった。「数日の間私はうれしい興奮でわれを忘れました」後日フォッカーに、この発見は心悸亢進をもたらしたと語った。彼がドゥ・ハースに語ったことはさらに一層深い意義がある。彼の計算が、説明できなかった天文学の観測と一致することがわかったとき、彼は自分の中で何かが実際にぱちんと音をたてたという感じを受けた・・・。

—パイス (Abraham Pais)

C.1 うれしい興奮

1914 年 11 月アインシュタインは何を発見して「うれしい興奮で我を忘れ」たのだろうか。これまで水星の軌道の細部までは説明できなかったのだが、彼の創り出したばかりの一般相対性理論（実際にはまだ完成していなかった）では、正しく計算で示すことができたからだ。

水星は太陽の周りを、円軌道とはかなり違った軌道を描いて回っている。ふつう惑星は半径方向に振動して、円軌道を崩している。その結果、楕円軌道になる。ニュートン力学によれば、惑星と太陽の相互作用だけ考えると、円軌道の 1 周期は半径方向の揺れる振動と厳密に同じになる。したがって、太陽に最も近い軌道点、いわゆる**近日点**はいつも同じ位置になり、楕円軌道は回転ごとにずれることはない。このプロジェクトは、この非相対論的結果を確かめることから始める。なぜ変わらないものを計算するという煩わしいことをするのか？ 水星の軌道が実際に変わるという観測があるからだ。最も内側の点である

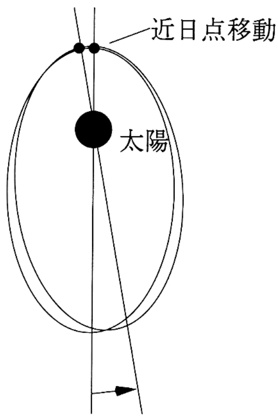


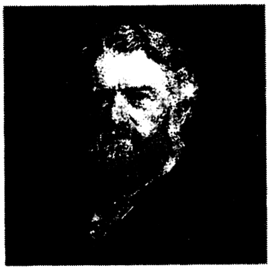
図 C.1　1 世紀間に起きる水星軌道の移動の誇張図。

近日点は太陽の周りをわずかながら動く。軌道 1 周毎に少しずつ進んで行く（図 1)。楕円の長軸は1世紀当たりわずかに 574 秒角（0.159 度）の割合で回転する（1 度は 3600 秒角に等しい)。ニュートン力学では 531 秒角の移動を他の惑星からの摂動の影響として説明する。しかし、どうしても 1 世紀当たり 43 秒角（0.0119 度）（**残差**と呼ばれる）が、これらの効果をすべて考慮に入れた後でも残る。この食い違い（ただし現在の値ではない）は 1859 年という早い時期にルヴェリエ（LeVerrier）によって観測値をもとに計算されていた。水星の近日点移動は**近日点の歳差**と呼ばれることがある。

ニュートン力学によると、水星の近日点移動には残差はなく、1 世紀当たり 43 秒角を説明することはできない。この値は小さいけれども、無視するには大きすぎるし、観測誤差のせいにもできない。しかしアインシュタインの一般相対論はピッタリ当てた。その結果：うれしい興奮で我を忘れた。

このプロジェクトでは、不正確なニュートンの予測を復習し、ウォールド（Robert M. Wald, *General Relativity*, University of Chicago Press, 1984 年 142–143 ページ）にしたがって、水星の近日点移動の一般相対論的近似計算を実行する。この近似では、惑星が円軌道をしているかのように角度の運動を平面上で記述する。この仮定から 1 軌道分の時間を計算する。近似ではその平面上で、調和振動子がポテンシャル井戸の最小値の周りで前後運動しているかのように、半径方向の運動を記述し（図 2)、半径方向に 1 往復する振動の時間を計算する。ニュートンにしたがえば、惑星と太陽の間の相互作用だけ考えると円軌道の周期と調和振動の周期は等しくなる。この場合、惑星が半径方向に前後する振動の周期と同じ時間で 1 周する。結果は軌道が閉じて楕円軌道になり、惑星は楕円の経路を永遠に繰り返し運動する。それに対して、角度と半径の運動の周期はアインシュタインの近似によると全く違う。半径方向の振動はもっとゆっくりになる。この差から太陽の

ニューカム　(Simon Newcomb)



1835 年 3 月 12 日、ノバスコシア州ウォーレス生まれ
1909 年 7 月 11 日 ワシントン DC で死去
(写真は ヤーキス天文台の好意による)
1901 年から 1959 年までそしてそれ以降でも、ほとんどの天文学者によって使われている惑星の位置の表（いわゆる**天体暦**）はニューカムと彼の共同研究者 ヒル（George W. Hill）によって蓄積されたものである。5 歳のころ、ニューカムは計算に 1 日数時間使い、7 歳にならないうちに 3 乗根を紙とペンで求めた。彼はほとんど正規の教育を受けておらず、ワシントン D.C. の図書館の専門分野の棚を熱心に探索して回っていた。彼はそこで旧米暦を発見した。それについて、彼は「これで成し遂げられている成果は、これまでなされてきた最も高い知力を具体化していると私に感じられた」と語っている。

ニューカムは海軍天文台で「計算機」(計算する者）になった。徐々に昇進し、航海暦編纂局長になった。その後、彼は人生の多くを費して、存在している最良のデータから太陽系の天体の運動を計算した。ニューカムはダウニング（Q. M. W. Downing）と共同で天文定数の世界的なシステムを始めた。1896 年に多くの国々で採用され、1950 年には公式に全世界で使われた。

1914 年にアインシュタインによって計算された水星の近日点移動は本来ならニューカムの表の数値と比べられるべきであったであろう。

周りの水星の近日点移動を計算する。

C.2　線形調和振動子

なぜ人工衛星は半径方向を前後に振動するのか？ 図 2 の太い実線で表したニュートン的な運動の有効ポテンシャルを見よ。この太い実線には、r 一定で円軌道することのできる最小値があり、その半径で粒子が留まることができる。しかし両矢印で示したように、半径方向にも前後に動ける。

内外への振動にどれだけの時間がかかるのか？ それは、図 2 に示した有効ポテンシャル曲線の極小近くの形による。振幅が小さいと、曲線の重要な部分はこの極小のとても近くにあり、よく知られた数学の定理を使うことができる：もし連続で滑らかな曲線が極小値をもつならば、その極小の近くでは、極小点に頂点をもつ放物線で曲線を近似することができる。このような放物線を図 2 の有効ポテンシャル曲線に重ね合わせて示してある。図から、放物線が最小の近くのポテンシャルのよい近似であることは明らかである。実際、水星の軌道は 4604 万キロメートルの半径方向の最小値（近日点）から 6986 万キロメートルの最大値（いわゆる**遠日点**）まで揺れ動く。

初等物理では、放物線上の粒子がどのように動くか知られている。運動は**調和振動**と呼

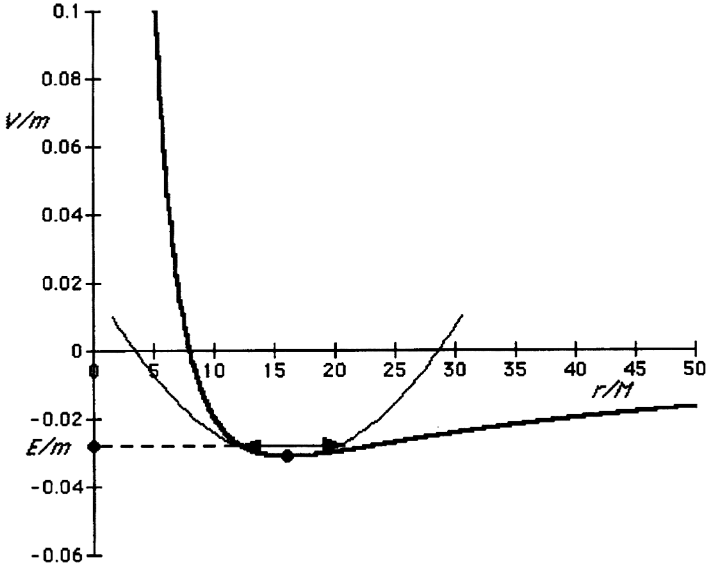


図 **C.2**　コンピュータプロット：**166** ページの第 **4** 章の図 **5** から写したニュートンの有効ポテンシャル（太い曲線）。その上に単純な調和振動子（細い曲線）の放物線型ポテンシャルが重ね合わされている。**2** つの曲線は有効ポテンシャルの最小値付近だけ互いに一致している。同じような組の曲線を使って、水星軌道における半径方向の振動を小さな振幅の調和振動として近似する。

ばれ、公式

$$x = A \sin \omega t \tag{C.1}$$

にしたがう。ここで A は振動の振幅で、ω（ギリシャ文字の小文字オメガ）は振動がどれだけすばやいかを表す。放物線的なポテンシャルの中で振動する粒子の単位質量当たりのポテンシャルエネルギー V/m は公式

$$V/m = \frac{1}{2}\omega^2 x^2 \tag{C.2}$$

によって与えられる。(C.2) 式から、両辺を変位 x について 2 階微分することによって ω を求めることができる：

$$\frac{d^2(V/m)}{dx^2} = \omega^2 \tag{C.3}$$

一般的に、ポテンシャルの形がわかれば、曲線の 2 階微分をとり、$d(V/m)/dx = 0$ を満たす極小点で評価することによって極小の周りにおける調和振動の振動率 ω を求めることができる。

C.3　水星の半径方向の調和振動：ニュートン

水星における半径方向の振動の問題は $x = 0$ の周りに振動せずに、軌道の平均半径 r_0 の周りに振動することに起因する。r_0 の値は何か？ 有効ポテンシャルが極小をとる半径である。ニュートン的な軌道に対して、半径方向の運動は 164 ページの (4.24) 式と 165 ページの (4.29) 式によって与えられる：

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{E}{m} - \left[-\frac{M}{r} + \frac{(L/m)^2}{2r^2}\right] = \frac{E}{m} - \frac{V(r)}{m} \qquad \boxed{\text{ニュートン}} \quad \text{(C.4)}$$

この式から有効ポテンシャル（165 ページの (4.28) 式）を定義する：

$$\frac{V(r)}{m} = -\frac{M}{r} + \frac{(L/m)^2}{2r^2} \qquad \boxed{\text{ニュートン}} \quad \text{(C.5)}$$

質問 1　ポテンシャルの極小値を求める。(C.5) 式によって与えられる単位質量当たりのポテンシャル V/m を r について微分せよ。質問 2 で使えるように、この 1 階微分を消さずに残しておけ。別の計算として、この微分を 0 とし、有効ポテンシャルが極小となる半径 r_0 を決定せよ。この結果を使い、未知の量 $(L/m)^2$ を M と r_0 で表せ。

質問 2　半径方向の振動率 ω_r. 半径方向の振動率を求めるために、(C.3) 式を使いたい。したがって、(C.5) 式の V/m を r について 2 階微分せよ。その結果で $r = r_0$ とし、質問 1 の $(L/m)^2$ の値を代入せよ。(C.3) 式を使い、水星が半径方向に振動する時間的割合をニュートン力学にしたがって求めよ。

C.4　軌道上の水星の角速度：ニュートン

水星が半径方向に運動するときの時間変化率 ω_r と方位角方向の運動変化率 ω_ϕ を比べたい。155 ページのニュートンの絶対時間の増加 dt で表した角運動量のニュートン的定義

$$L/m = r^2\frac{d\phi}{dt} = r^2\omega_\phi \qquad \boxed{\text{ニュートン}} \quad \text{(C.6)}$$

を使え。この式は (4.2) 式と似ている。ほとんど円軌道を描いている水星の角速度 $\omega_\phi = d\phi/dt$ の値を求めたい。

質問 3　軌道上の水星の角速度。(C.6) 式に質問 1 で得た値 L/m を代入し、$r = r_0$ とせよ。$d\phi/dt$ を M と r_0 で表せ。

質問 4 半径振動と軌道角速度との比較。 質問 3 で得た角速度 ω_ϕ の値と質問 2 で得た半径方向の振動率 ω_r を比べよ。ニュートン力学にしたがって、水星軌道の近日点の移動について（太陽と水星の相互作用だけ考えたとき）あなたの結論を述べよ。

C.5 有効ポテンシャル：アインシュタイン

ここで、一般相対論の場合について分析を繰り返そう。168 ページの (4.30) 式は軌道運動する惑星の半径方向の運動を表す。(C.4 式と似た式を求めるために 1/2 倍せよ：

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{E}{m}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left[1+\frac{(L/m)^2}{r^2}\right]\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{E}{m}\right)^2 - \frac{U}{m}\end{aligned} \tag{C.7}$$

(C.4) 式と (C.7) 式は似た形をしており、C.3 節と C.4 節のニュートンの解析と似た方法を使って一般相対論でも水星の半径運動の調和解析ができる。まず手始めに (C.7) 式の右辺の最後の項を有効ポテンシャルという名を付け、記号 U/m を使おう。

これからさらに進む前に、まず第一に (C.7) 式の時間が衛星の腕時計時間である固有時 τ であり、ニュートンの絶対時間 t ではないことを確認しておく。時間の基準が違うことが必ずしも致命的であるとは限らない。ニュートン力学には唯一の絶対時間があり、どの相対論的時間で置き換えなければならないかをまだ決める必要がないからだ。水星の近日点の移動率を予言するときにどの時間を使うかという選択は重要ではない。

第二に、(C.7) 式に相対論的表現 $(1/2)(E/m)^2$ が (C.4) 式のニュートン的表現 (E/m) の代わりとなる。大胆にも、エネルギーをエネルギーの 2 乗に置き換えるのか？ ともに運動の定数を表しており、不思議なことにこの違いが我々の分析に影響を与えることはない。我々が正しいことの証拠は (C.7) 式の真中の第二項の積の形である。記号 U/m をこの第二項に割り当てる：

$$\begin{aligned}\frac{U}{m} &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left[1+\frac{(L/m)^2}{r^2}\right]\\ &= \frac{1}{2} - \frac{M}{r} + \frac{(L/m)^2}{2r^2} - \frac{M(L/m)^2}{r^3}\end{aligned} \tag{C.8}$$

第二番目の等号の右辺には、ニュートンの式 (C.5) を構成している 2 つの有効ポテンシャルの項がある。それに加え、第一項 (1/2) があるために引力中心から離れたとき、(C.7) 式の半径速度が正しい値になることを保証している。例えば、全エネルギーが静止エネルギー ($E/m = 1$) と等しいとする。r の値が大きくなると、半径方向の速さ $dr/d\tau$ ((C.7) 式）は 0 にならなければならないが、実際にそうなっている。ポテンシャル U/m を図 3 にプロットした。

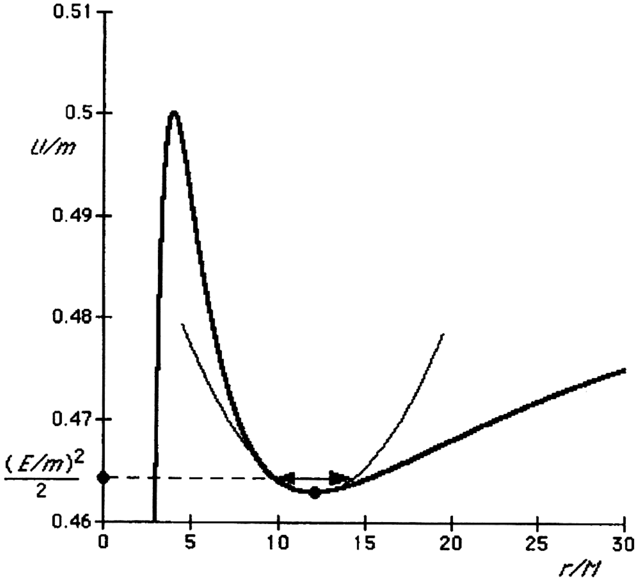


図 **C.3** コンピュータプロット：半径方向の振動を単純な調和運動として分析するために、最小値で一般相対論的有効ポテンシャル U/m（太い線）を放物線（細い線）としての近似した図。太い有効ポテンシャル曲線はブラックホールのものであり、太陽のものではない。太陽の有効ポテンシャルはこの図のスケールではニュートン的な関数と区別できないだろう。

(C.8) 式における二番目の等号の最後の項は一般相対論で生じる引力のポテンシャルを表している。この項がニュートン力学の予測から、わずかなズレを引き起こす。分母の r^3 のために、この負の項は小さい半径ですべての他の項を凌ぎ、図 3 の有効ポテンシャルの左辺で落下させるようにはたらく。

まとめると、(C.7) 式と (C.8) 式の人工衛星の腕時計時間と「エネルギーの項」$(1/2)(E/m)^2$ に不満がなければ、ニュートン力学の手法を使うことによって、人工衛星の半径方向の運動が一般相対論的に分析できる。もちろん我々は相対論の問題を解こうとしているのだが、その形が似ているので、一般相対論的な計算を実行するのにニュートンの方法を使うことができるのだ。

C.6　水星の半径方向の調和振動：アインシュタイン

アインシュタインにしたがって、水星の半径方向の振動を分析しよう。

質問 5　ポテンシャルの極小値の発見。 有効ポテンシャル (C.8) を r で微分をせよ。この 1 階微分を質問 6 のためにとっておけ。それとは別に、この微分を 0 とし、$r = r_0$ とおき、未知の量 $(L/m)^2$ について解き、既知の量 M と r_0 で表せ。

質問 6　半径振動率。 (C.3) 式を使って、半径方向の振動率を求めたい。そのために (C.8) 式から 2 階微分を求めよ。その結果において $r = r_0$ とし、質問 5 で得た $(L/m)^2$ を代入して

$$\left.\frac{d^2(U/m)}{dr^2}\right|_{r=r_0} = \omega_r^2 = \frac{M(r_0 - 6M)}{r_0^3(r_0 - 3M)} \tag{C.9}$$

を求めよ。

質問 7　半径振動のニュートン極限。 水星軌道の半径は $r_0 = 5.80 \times 10^{10}$ メートルである。この半径と幾何学単位で表した太陽質量 M を比べよ。もし (C.9) 式のうちあるものが他と比べて無視できれば、質問 2 で求めたニュートンの ω_r と同じであることを説明せよ。

C.7　軌道上の角速度：アインシュタイン

水星の半径の振動率を軌道上の方位角の変化率と比べよ。方位角 ϕ の変化率は角運動量の定義、194 ページの (C.2) 式から得られる：

$$\frac{L}{m} = r^2\frac{d\phi}{d\tau} \tag{C.10}$$

ここでの時間も人工衛星の腕時計（固有）時であることに注意する。

質問 8　角速度。 (C.10) 式の両辺を 2 乗し、質問 5 の結果を使って、$(L/m)^2$ を消去せよ。その結果は

$$\omega_\phi^2 \equiv \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 = \frac{M}{r_0^2(r_0 - 3M)} \tag{C.11}$$

と書くことができる。相対論的予測では、ニュートン的な分析でそうであったように、ぐるぐる回る水星の方位角方向の運動が内外に揺れる半径方向の振動と歩調を合わせることができるだろうか。

質問 9　角速度のニュートン的極限。 質問 7 で行ったような同じ近似をし、ω_ϕ の値が質問 3 で求めたようなニュートン力学の式と同じであることを示せ。

C.8 近日点移動の予言

水星の近日点移動は、その軌道の周りを惑星が掃くときの振動数と半径方向への振動数の差から生じる。ニュートン的な分析では、惑星と太陽間の相互作用だけを考えれば、これら 2 つの振動数は等しくなる。しかしアインシュタインの理論はこれら 2 つの振動数が等しくないことを示しており、水星は軌道ごとに最大 (または最小) の半径となる角度がわずかにずれる。これが結果として近日点移動になる。移動率は軌道の角振動数 ω_ϕ と半径方向の角振動数 ω_r の差になる。

質問 10 振動数の 2 乗の差。 (C.9) 式と (C.11) 式から、2 乗の差 $\omega_\phi^2 - \omega_r^2$ を M, r_0, ω_ϕ, それに定数で表せ。

質問 11 振動率の差。 アインシュタインによる解析でさえも、二つの角率度 ω_ϕ, ω_r は数値としてほとんど同じである。したがって質問 10 の結果を次の形で書け：

$$\omega_\phi^2 - \omega_r^2 = (\omega_\phi + \omega_r)(\omega_\phi - \omega_r) \approx 2\omega_\phi(\omega_\phi - \omega_r) \tag{C.12}$$

最初の方の質問の結果を使ってこの近似式が

$$\omega_\phi - \omega_r \approx \frac{3M}{r_0}\omega_\phi \tag{C.13}$$

と書くことができることを示せ。

(C.13) 式は方位角方向の運動と半径方向の振動の角度変化率の差である。この変化率の差から水星の近日点の移動率を計算することができる。

ω の式のすべてが $d(\text{角度})/d\tau$ または $d(\text{位相角度})/d\tau$ の形をしている。$d\tau$ はどの分母にもあるので、角度の増加を考えるときには打ち消し合う。(C.13) 式は以下になる：

$$\begin{aligned}(\text{予言された移動角度}) &= (\text{軌道運動で動く全角度}) - (\text{半径方向に動く全位相角度}) \\ &= \frac{3M}{r_0}\,(\text{軌道運動で移動する全角度}) \end{aligned} \tag{C.14}$$

さらに、望めばどんな角度の単位でも使うことができる。つまり、整合性が保たれている限り、度やラジアンまたは秒角などを使ってもよい。この式が基づいている数値的な予測は観測の結果と比べなければならない。

C.9 観測との比較

質問 12 水星の軌道周期。 水星の軌道周期は 7.602×10^6 秒で、地球は 3.157×10^7 秒である。地球の 1 年を単位として使うと、水星の周期は何年になるか。

質問 13 1 世紀での水星の回転。 水星は 1 世紀（100 年）で太陽の周りを何回転するか。1 世紀で描く角度は何度になるか。

質問 14 補正因子。 太陽の質量 M は 1.477×10^3 メートルであり、水星の軌道半径 r_0 は 5.80×10^{10} メートルである。(C.14) 式の補正因子 $3M/r_0$ の値を計算せよ。

質問 15 1 世紀当たりの移動角（角度）。 (C.14) 式を使って、質問 13 と 14 の答えを掛け合わせて、1 世紀当たりの水星軌道の近日点移動を角度で求めよ。

質問 16 1 世紀当たりの移動角（角度）。 1 度は 60 分角で、1 分角は 60 秒角である。質問 15 の答えを $60 \times 60 = 3600$ 倍して 1 世紀当たりの水星軌道の近日点移動を秒角で求めよ。

さらに注意深く分析を進めると、1 世紀当たり 42.98 秒角（0.0119 度）という値が予測できる（表 1 を見よ）。観測される近日点の移動率はこの値 42.98 ± 0.1 秒角と完全に一致する（参照文献を見よ）。あなたの計算とどれだけ近いか。

C.10 内側の惑星の近日点移動

太陽系の他の惑星の近日点も一般相対論の計算にしたがって移動するのか？ そうだ。しかしこれらの惑星は太陽から離れており、予測される移動は水星よりも小さい。この節では、水星と金星、地球、火星の近日点移動について我々の評価と正確な計算の結果を比較する。

カルフォルニア州のパサデナのジェット推進研究所 (Jet Propulsion Laboratory, JPL) は太陽系の主な天体の位置と速度の知識の向上に精力を注いでいる。主な惑星と月に対して JPL はデータベースと Solar System Data Processing System（SSDPS）として知られるコンピュータプログラムを維持している。入力として惑星の現在の位置に対する観測的データを使う。相互に関係する 100 以上のコンピュータプログラムが同時にはたらいて、これらのデータと相対論の運動法則を使って過去と未来の時刻における惑星の位置を計算している。運動方程式は各惑星と太陽の間の重力相互作用だけでなく、すべての惑星、地球の月、300 個の重い小惑星の間のあらゆる相互作用も、地球と月の間の非球対称性、潮汐効果による相互作用も同様に採り入れている。

近日点移動についての我々のプロジェクトで JPL での技術的スタッフの責任者スタンディッシュ（Myles Standish）は SSDPS の数値積分プログラムを使い、1800 年から 2200 年までの 4 世紀におよぶ内側の 4 つの惑星の軌道を計算した。夜通しこの計算を 2

表 C.1 内側の惑星の近日点移動

惑星	秒角で測った 1 世紀当たりの近日点移動（JPL の計算）	軌道半径 天文単位 *	年単位の軌道周期
水星	42.980 ± 0.001	0.38710	0.24085
金星	8.618 ± 0.041	0.72333	0.61521
地球	3.846 ± 0.012	1.00000	1.00000
火星	1.351 ± 0.001	1.52368	1.88089

* 天文単位（Astronomical Unit, AU）:地球軌道の平均半径。巻末公式一覧にある。

度実行した。1 度は相対論的効果を含む全プログラムを、2 度目は「相対論効果を取り除いて」行った。スタンディッシュは光の速度を 10^{10} 倍することにより、つまり実質的に光速を無限大にすることで、「相対論的効果を除いた」(38 ページの (2.5) 式と 43 ページの (2.10) 式を使うことにより、通常の単位でシュワルツシルト曲率因子が $(1-2GM_{\rm kg}/rc^2)$ と書けることを示すことができる。この式の値は c が大きくなると 1 に近づく)。この 2 つの計算に対して、4 つの内側の惑星の近日点が 4 世紀間に渡って一連の点として計算される。非相対論的計算の実行結果から相対論的計算の実行結果を引くことで、1 世紀当たりの近日点移動が一般相対論によってのみ説明されることが明らかになった。表 C.1 の 2 列目に計算の結果とその誤差が表されている。後ろの列には、これらの惑星の補足的なデータがある。

質問 17 内側の惑星の近日点移動。JPL の計算した金星と地球、火星の近日点移動とこのプロジェクトで行った近似公式による結果を比べよ。

C.11　時間の標準のチェック

質問 18　球殻時計と腕時計の間の差。 水星は r_0 の軌道上を 4.8×10^4 メートル毎秒の平均速度で運動するのだが、特殊相対論を使って、人工衛星時計時間 τ と同じ半径 r_0 の球殻時計時間 t_{shell} の変化率を求めよ。τ から t_{shell} へ時間を変えると 1 世紀で水星の軌道運動を動く全角度はどれだけ変わるか。比で答えよ。((C.14) 式)。したがって、長軸の回転の角度はどれだけ変わるか。

質問 19　球殻と遠方時間の間の差。 半径 r_0 での球殻時間 t_{shell} と記録係の遠方時間 t の差を比で求めよ。時間を t_{shell} から t へ変えると、1 世紀間に水星が軌道運動する全角度は比でどれだけ変わるか ((C.14) 式)。したがって予言される軸の回転角はどのくらいになるか。

質問 20　基準の時間は必要か。 質問 18 と 19 の結果から、基準時間（惑星の固有時 τ または t_{shell}, 遠方時間 t）の選び方によって 1 世紀に水星の近日点移動の数値的な予言に大きな差が生じるかどうか答えよ。地上の時計で測ると、その答えは違うだろうか。

C.12　参照文献と謝辞

最初の引用：Abraham Pais, *Subtle Is the Lord: The Science and the Life of Albert Einstein*, Oxford University Press, New York, 1982, 253 ページ。（日本語訳『神は老獪にして・・・ –アインシュタインの人と学問–』（西島和彦監訳、産業図書））

水星の近日点移動の観測値：Irwin Shapiro, *General Relativity and Gravitation, 1989* edited by N. Ashby et al., Cambridge University Press, New York, 1990, 313 ページ。

表 C.1 の半径と軌道半径は二つの文献から：Kenneth R. Lang, *Astrophysical Data, Planets and Stars,* Springer-Verlag, New York, 1991 および *Landolt-Börnstein, Numerical Data and Functional Relationships in Science and Technology, Group VI: Astronomy and Astrophysics,* Volume 34, *Astronomy and Astrophysics,* Extension and Supplement to Volume 2, Subvolume a, *Instruments, Methods, Solar System,* edited by H. H. Voigt, Springer-Verlag, New York, 1993

ジェット推進研究所のスタンディシュは、C.10 節で示した、内側の惑星についてプログラムを走らせてくれた。彼もこのプロジェクト全体について有益なコメントをくれた。

第5章

見える世界

- 本当にブラックホールを見ることができるのだろうか。
- 光はブラックホールの近くで普通の速さで進めるのか。
- 光はブラックホールを軌道回転できるのか。
- ブラックホールの地平線を通って落下すると、頭上の星々はどのように見えるか。

事実をそっくり語りなさい、しかし斜めに語りなさい ―
成功はまわり道にあります
わたしたちのひ弱な喜びには明るすぎます
真実のもつ至高の驚きは
丁寧に説明すると
子供たちも稲光りが怖くなくなるように
真実はゆっくりと輝くのがよいのです
さもないと誰もかも目がつぶれてしまいます ―
― エミリー・ディキンソン 1872年頃（詩集番号 F1263）

5.1 光の運動

（最後に）周りを見回すと何が見えるのか。

自転していない球対称ブラックホールへ入っていく光の運動について何が言えるのか？ここでは大きな疑問を扱う。宇宙空間で起きることで我々が知ることのできることは、すべて光速またはほとんど光速で進む信号によってもたらされている。コンパクトで重い物体の近くで起きていることを調べると、見ているものが歪まずにやってきていることが当然だとは思えなくなる。

曲がった時空では歪んで見える。

引力中心の近くを通ると光は曲げられるのだろうか。もしそうなら、見えるものをどうして信用することができるのだろうか。我々はブラックホールを囲む球殻に立っていると

しよう。または、ブラックホールを軌道回転する推進力のない宇宙船に乗っていてもよい。我々には何が見えるのか。ブラックホールはどれほど大きく見えるか。遠くに見える星の見かけの位置と色はどうか。星空全体は頭上に一様に広がっているのだろうか。光のパルスの軌道を追跡することによって我々はこれらの質問に答えることができる。結果はあらゆる周波数の電磁波に適用することができる。

光の軌道の「部分部分」をまず見よ。

その前に まず以下の節で、シュワルツシルト幾何学における光の軌道の微小区間について記述する。光を追跡する立場として、球殻観測者と自由浮遊系観測者、それにシュワルツシルト座標の増分 dr, $d\phi$, dt を使う記録係のデータを考える。パルス光の経路に対する各要素の固有時は 0（$d\tau = 0$）であり、軌跡の微小区間を調べるためにこの性質を使うことを認識するまではよい。しかし、その結果の分析は、全軌跡をプロットするために必要なものがそろう前に行き詰まってしまう。光の運動の定数を見つける必要があるのだ。5.3 節でこの運動の定数を見つける。

5.2 光の速さの意味 I

いつ光は 1 よりも遅く進むのか。

光は自由浮遊観測者に対して $v = 1$ で運動する。

自由浮遊観測者が測定すると光速は $v = 1$ となる。 推進力のない宇宙船がブラックホールの中心めがけてまっすぐに落下する。または、宇宙船が安定円軌道で快適に運動し、それに乗って宇宙物理学者が観測を行う。左側から右側へ、前から後ろへ、床から天井へ、宇宙船の中で全方向に往復する光の速さを測る。実験の結果はどうなるのか。自由浮遊系中で光の速さはどうなるか。

この本の終わりの方になって、なぜこのような初歩的な質問をするのか。光速は自由浮遊系でいつもそうであるように、当然 1 である。相対論の研究が始まって以来、互いに重なる自由浮遊系で光速が不変であり、一定であることは我々の分析の根本原理であった。

そう、ブラックホールの周りの軌道がどうであれ、$v = 1$ が推進力のない宇宙船の中で行われる光速の測定結果となるであろう。もちろん宇宙船中の潮汐加速度により光速の測定実験において空間的な広がりと測定時間は制限を受ける。急落下すると、これらの潮汐加速度は変化し、実験機器の精度に合わせて、慣性または自由浮遊と呼んでいる時空領域を繰り返し再定義することが強いられる（第 1 章の 1.8 節）。それにもかかわらず、ブラックホールの周りの自由浮遊軌道が何であれ、これらの制限内で光速は 1 のままである。

なぜ、今になって光の速さを持ち出すのか？ それは、光速の仮定が今にも揺らぎそうになっているからだ。遠方時間の増加 dt の間に光のパルスについて、記録係の光の速さを調べると、我々の経験は揺らぐ。

シュワルツシルト記録係は光の速さを計算して $v < 1$ を得る。 レーザーパルスがブラックホールの周りを弧を描いて飛ぶ。この経路上で 2 つの起爆装置を互いに近くに置き、レーザー光で明るく照らし出す。光が当たると、各起爆装置が瞬時にはたらき爆発す

る。これらの爆発事象を調べよう。2 つの起爆装置は同じパルスを感知するので、爆発の事象間の固有時は 0 である。光の通る 2 つの事象間のどんな腕時計時間も 0 になり、局所的にまっすぐな世界線である**ヌル測地線**にしたがう。シュワルツシルト計量（43 ページの (2.10) 式）を使ってこの条件を近傍にある 2 つの起爆装置に適用すると

$$d\tau^2 = 0 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \dfrac{2M}{r}} - r^2 d\phi^2 \qquad \boxed{\text{光}}\ (5.1)$$

となる（光の運動を表す式の式番号の左に（光）という単語を添えた。それに対して、ここからは物質粒子、つまり質量のある粒子の場合には、式番号の左に ($m > 0$) を添える)。

半径方向の光のパルスの記録係速さ

まず、球殻からまっすぐ上を向いて発射されたレーザーパルスを調べる。この場合 $d\phi = 0$ であり、(5.1) 式は

$$\frac{dr^2}{1 - \dfrac{2M}{r}} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 \qquad \boxed{\text{光}}\ (5.2)$$

または

$$\frac{dr}{dt} = \pm \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \qquad \boxed{\text{光、半径方向の運動}}\ (5.3)$$

方位角方向の光のパルスの記録係速さ

となる。方位角方向の運動に対して同じ分析を実行せよ。$r d\phi$ は方位角方向の変位であり、$r d\phi/dt$ が方位角方向の記録係速度であることにも注意せよ。そして

$$r\frac{d\phi}{dt} = \pm \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} \qquad \boxed{\text{光、方位角方向の運動}}\ (5.4)$$

記録係は地平線近くの光で $v < 1$ を記録する。

を示せ。(5.4) 式の右辺には平方根があって、(5.3) 式の右辺には平方根がないことに注意せよ。これらの方程式には何か深遠な意味がある。記録係の光の速さは 1 よりも小さく、運動の方向にさえ依存している。半径方向にも方位角方向にもである。ブラックホールから遠い距離 r で、半径方向または方位角方向の光の速さは 1 に近づく。しかしながらブラックホールに近づくと、(r, ϕ, t) の値から得られる光速は 1 よりも小さくなることがある。シュワルツシルト記録係に対しては「光の速さは光速（1 の値）よりも小さい」と言うことができる。特に、記録係が測ると、半径方向と方位角方向の光の速さは地平線 $r = 2M$ で 0 になる。



何だって？ 相対論の研究を通して、誰もが光の速さは不変であり、すべての観測者に対して同じ 1 の値であると主張している。この原理は多くの混乱を引き起こしたのだが、最終的に私は受け入れた。今ここでは、ブラックホールの近くで光の速さが 1 よりも小さくなり、地平線では 0 になるなどと言っている。またここでもあなたは全くもって私を混乱させることに成功したようだ。どちらかはっきりしてくれ。

記録係が予測する光速の遅れは局所的観測者には測定されない。

近くを通過する光をどんな観測者が直接局所的に測定しても、光速が遅くなっているとは言わない。(5.4) 式と (5.3) 式を使って計算した光の速さは記録係の机上でのことであり、局所的に行なわれた実験を直接報告したものではない。実際、これらの予測は初めに得た結果の視点に含まれるものであり、驚くべきことではない。遠方の点から落下し始め、地平線を越えて内側にまっすぐ落ち込む質量 m の粒子を思い出せ（第 3 章 3.5 節)。近傍の球殻観測者が記録すると、その粒子は地平線上を光速で運動している。しかしシュワルツシルト記録係は、石がゆっくりになり地平線で静止すると記録する（100 ページの (3.22 式))。

今の場合も似ている。近傍の局所的観測者が測定すると (5.3) 式と (5.4) 式で表されるフラッシュ光の通過速度は 1 より小さくない。平坦時空の慣性系特殊相対論カプセルの中にいて自由浮遊落下している観測者が光速が 1 であることを確認しようと望めばいつでもチェックすることができる。球殻観測者も測定すると、光速は 1 である（以下の段落を見よ)。だったら記録係は光の速さが小さいと言っているが、それは全然測定できないのか。そして、もしそうなら、それはどうして物理理論の不可欠な部分となりうるのか。

記録係の光速は遠くから測られている。

その通りだ。記録係は重力中心近くで光速が小さくなっているのを評価したのだが、局所的観測者のうち誰もそうなっているのを直接観測していない。でも、遠方の観測者には速さが小さくなっているのが観測できる。そしてすでにそれが行われていた。シャピロ（Irwin Shapiro）は、太陽を通り過ぎると光速が小さくなるという予測を認識しており、太陽表面をかすめる電波を利用し伝達中に時間の遅れが起きたことを 1979 年に報告した。これはプロジェクト E の「太陽付近で遅くなる光」で述べる。

ところで、記録係の光速が小さくなることから、パラドックスを解くことができる（第 3 章 3.5 節)。そのパラドックスは、以下のようなものである。見下ろしている遠方観測者は、落下者の落下速度がどんどん遅くなっているのを観測するのだが、決して地平線にたどり着かない。その一方で、落下者はどのように光速で地平線を通過しているのか。このパラドックスの解は地平線付近の「記録係の遅い光速」のため、外側に伝わる信号は出て行くのに長い時間がかかるためだというものだ。ソーン（Kip Thorne）はこれらの信号を「過去の遺物」と呼んだ。

球殻観測者に対して光速は $v = 1$ である。

球殻観測者が測定すると光速は $v = 1$ である。 光がちょうど通過している局所的な球殻上にいる観測者では、光が普通の速さ 1 になっている。我々の数学が正しく速さ 1 を予測していることを確かめるために、球殻観測者の局所的な計量が平坦時空のものと同じであることを思い出せ（57 ページの (2.33) 式)：

$$d\tau^2 = dt_{\text{shell}}^2 - dr_{\text{shell}}^2 - r^2 d\phi^2 = dt_{\text{shell}}^2 - ds_{\text{shell}}^2 \tag{5.5}$$

光に対して $d\tau = 0$ を使い、$ds_{\text{shell}}^2 = dr_{\text{shell}}^2 + r_{\text{shell}}^2 d\phi^2$ を使って簡単にし

$$\frac{ds_{\text{shell}}}{dt_{\text{shell}}} = \pm 1 \qquad \boxed{光} \tag{5.6}$$

であることを示せ。したがって、すべての球殻上で局所的に測ると光の速さは 1 になる。一般的に、光のビームは、この章の最後で見るように、ブラックホールの近くで曲がる。それでも経路の微小区間で、すべての球殻観測者が観測すると、通り過ぎる光のフラッシュの速さは 1 になっている。

球殻で測定した光速が 1 に等しいということは、球殻観測者による測定に対して重要な結論をもたらす。局所的な球殻距離を測るためにレーダーを使うことができる。ある方向に光のフラッシュを送って、近くの物体で反射した後に、戻って来た時刻を測る。メートルで測った反射物体までの距離が、局所球殻時計で測った往復の時間の半分に等しいことを仮定する。これで、物差しが伸びたり縮んだりするのを気にする必要はなくなった。だが、半径方向に運動しないレーダーパルスは曲がった空間の軌道を通って近くの物体に行って戻ってくるが、その道のりは軌道が曲がっていても正しい。しかし、5.5 節または 5.6 節で述べるように、曲がった時空幾何ではレーダの経路も曲がるため、反射物体の方向が歪められてもおかしくはない。

レーダで球殻距離を測定せよ。

球殻で測った光速が 1 に等しいということは、シュワルツシルト座標を使って計算した光速が小さいことをより深く理解するのに役立つ。フラッシュ光の経路に沿った 2 つの事象を考えよう。これら 2 つの事象間の光の記録係速度の方位角成分は $(1-2M/r)^{1/2}$ である。なぜなら、記録係に対して光は球殻観測者と同じ方位角方向の距離 $rd\phi$ を動くが、経過時間 $dt = dt_{\text{shell}}/(1-2M/r)^{1/2}$ は長くなる。光の半径方向の運動に対して、2 つの事象間の記録係経過時間は球殻観測者の時間よりも長いだけでなく、半径距離も短い：$dr = dr_{\text{shell}}(1-2M/r)^{1/2}$. その結果、記録係半径速度は $(1-2M/r)$ となる。

5.3 軌道運動する光

フラッシュを質量が 0 になるような軽い高速の粒子として扱え。

次は星だ、星！ ブラックホールの地平線近くの球殻に立つと、星はどのように見えるのだろうか。球殻を通過する自由浮遊系中でシリウスを見るにはどの方向を向けばよいのか。シュワルツシルト記録係はアンドロメダ銀河中の最も新しい超新星残骸を見るために、どの方向に目を向けたらよいか。さらに、もし記録係が指し示した方向に望遠鏡を向けたとして、本当にそれが見えるだろうか。

親しみ深い星々を見るためにどこを見ればよいか。

これらの疑問に答えるために、各々の星、各々のクエーサ、各々の超新星からブラックホールめがけてやってくる光の長い軌道を追跡する。地平線近くの球殻上でうまく立って、螺旋状に進む一条の光が目の虹彩に正確に入るようにする。ここでのゴールは 5.2 節で述べたように、光の経路の断片をつなぎ合わせて、ブラックホールを取り囲みながら地平線を越えて落ちていく軌道を作り上げることである。完全な軌道を組み立てることによって、最終的に我々は、ブラックホールの近くで天空に目を向けたときに何が見えるかを予測できるようになる。

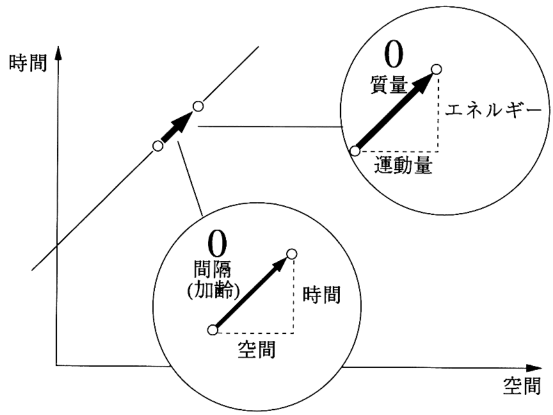


図 5.1 自由浮遊系におけるフラッシュ光の世界線。時空中で傾きは 1 である。挿入図：世界線の傾きが 1 であることは、この世界線に沿った事象間の空間間隔と時間間隔が等しいことを意味する。よってそれらの時空間隔は 0 であり、フラッシュの加齢も 0 になる（13 ページの (1.30) 式で $d\tau = 0$）。同じフラッシュの運動量-エネルギーも傾き 1 で、光の 3 つの性質を象徴的に表している。つまり、質量が 0 で、光速で運動し、運動量の大きさがエネルギーに等しい（13 ページの (1.32) 式で $m = 0$）。

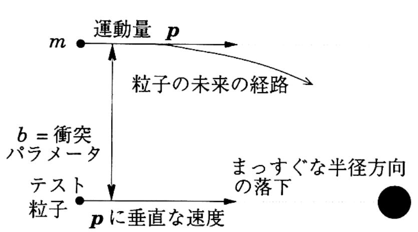


図 5.2 衝突パラメータ b の定義。高速の粒子（質量 m）が遠い距離から運動量 $\boldsymbol{p}$ でブラックホールに近づく。それることなく、ブラックホールにまっすぐ落下する平行速度を持ったテスト粒子を図中に見つけよ。初期の位置で平行な 2 つの経路間の垂直距離 b は衝突パラメータと呼ばれる。

光の経路を追跡するために 物質粒子の極値的加齢の原理に戻ろう。これは、質量のある粒子の初期事象と最終事象が固定されたとき、その粒子が運動する世界線のうち、腕時計の経過時間が極大（または一般的に極値）をとるようなものが実際の世界線として選ばれるという基本的規則である。この極値の原理は光には直接適用できない。光のパルスの加齢が自動的に 0 になるという根本的な理由のためである。世界線の各部分的要素を局所自由浮遊系（図 1）で観測すると、空間部分と時間部分は等しくなる。したがって、世界線の各要素に沿った加齢は 0 になり、全体的な世界線に沿った加齢も 0 である。光のフラッシュの生成から消滅までの全加齢は 0 である。いったいどうやったら極値的加齢の原理を光のパルスに適用することができるだろうか。

光の軌跡に沿った全加齢は 0 である。

答え：光に忍び寄れ。1 つ 1 つ順に速くなり、1 つ 1 つ順に軽くなっていく一連の物質粒子を分析することによって真空中のパルス光の運動について発見できるものが何かあるはずだ。このようにして、ゼロに近い質量で光速に近づく粒子にたどり着こう。この極限において、このような粒子の運動を光のフラッシュの運動とみなすことにする。それでは詳しく進めよう。

ゼロに近い小さな質量の高速粒子を光のパルスとして扱え。

ブラックホールを今にも通りすぎようとする高速の粒子（でもまだ質量がある）があり、初めはブラックホールからかなり離れていた（図 2)。粒子の近傍の局所時空は実質的に平坦である。運動量ベクトル $\boldsymbol{p}$ があり、それは運動方向の直線と同じ向きである。出発点で第一の線と平行な線（第二の線）を選び、試行錯誤して、テスト粒子がこの第二の線に沿って運動したとき、どの方向にもずれずにブラックホールにまっすぐ落ちて行くようにせよ。もともとの粒子とテスト粒子は平坦時空とみなせる遠方の位置から平行な直線に沿って出発する。遠方の位置では、2 直線の間の垂直な距離は**衝突パラメータ**と呼ばれ、記号 b で表される（図 2)。210 ページのボックスでは衝突パラメータと忍び寄りの方法を使って、光の運動方程式を求めている。

衝突パラメータ b の定義

5.4 光の速さの意味 II

記録係：方向が違うと、光の速さも違う。球殻観測者：光の速さはいつも $v = 1$.

210 ページのボックスの (5.14) 式と (5.15) 式は、遠方の記録係が計算したときの半径方向と方位角方向の速度成分である。記録係は、換算円周 r と遠方時間 t, 方位角 ϕ ですべての量を表して計算する（半径方向 $b = 0$ の運動に対して、これらの結果と (5.3) 式を比較せよ）。光のフラッシュが事象の地平線 $r = 2M$ に近づけば近づくほど、半径方向と方位角方向の速度成分はともにどんどん小さくなっていく。これで、どんな衝突パラメータに対しても光速を求めることができる。ボックスの (5.14) 式と (5.15) 式の両辺を 2 乗し、加え合わせ、平方根をとると

記録係の光速は衝突パラメータと r の関数である。

シュワルツシルト幾何学における光の運動

図 2 の上の粒子で示されるように、平坦時空における粒子の角運動量 L の大きさは定義から、ブラックホールからずっと離れたところにおける線形運動量 p_{far} に衝突パラメータ b をかけたものである。つまり、$L = bp_{\text{far}}$ である。線形運動量に対する角運動量の比 L/p_{far} は単に衝突パラメータ b である。平坦時空のこの領域で、特殊相対論の式を使い、質量 m の粒子の b を求めることができる（13 ページの (1.32) 式）。平坦時空で $m^2 = E^2 - p^2$ つまり $p = (E^2 - m^2)^{1/2}$ である。この式のエネルギーはちょうど全エネルギー、無限遠でのエネルギー E である。なぜなら粒子は実質的に無限遠にあるからだ。したがって

$$b = \frac{(\text{角運動量})}{(\text{線形運動量})} = \frac{L}{p} = \frac{L}{[E^2 - m^2]^{1/2}} \qquad \boxed{m > 0} \tag{5.7}$$

である。

さて、この超高速粒子（ほとんど光速であるが、完全にはフラッシュ光ではない）が遠方から、ブラックホールに近づいても、角運動量 L と無限遠でのエネルギー E はともに一定である（第 4 章）。したがって、(5.7) 式の右辺は運動のあいだ一定である。よって粒子が引力中心めがけて落下しても、左辺の無限遠で測定された衝突パラメータ b も一定のままである。

注意：無限遠で測られる人工衛星の衝突パラメータとそこでのエネルギーは無限遠で直接測られる。曲がっていた時空に入っていくにつれて、球殻観測者は、局所的な測定値から無限遠での値を推測しなければならない（235 ページの例題 1 と 183 ページの例題 3）。

フラッシュ光を真似ている高速粒子に対して、エネルギーと角運動量を一定に保ちながら質量 m を 0 に近づけよ。(5.7) 式は

$$b_{\text{light}} = \lim_{m\to 0} \frac{(\text{角運動量})}{(\text{線形運動量})} = \frac{L}{E} \qquad \boxed{\text{光}} \tag{5.8}$$

となる。質量 m の粒子のもともとの運動方程式は 162 ページの (4.20), (4.21), (4.22) 式である：

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = (E/m)^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left[1 + \frac{(L/m)^2}{r^2}\right] \qquad \boxed{m > 0} \tag{5.9}$$

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{(L/m)}{r^2} \qquad m > 0 \tag{5.10}$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}{(E/m)} \qquad \boxed{m > 0} \tag{5.11}$$

フラッシュの固有時は 0 になってしまうので、固有時 $d\tau$ を使わずに (5.9) 式と (5.10) 式を書き換えなければならない。固有時を消去するために、(5.9) 式と (5.10) 式に (5.11) 式の $d\tau/dt$ のべき乗をかける。この 2 つの式は

$$\begin{aligned}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 &= \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 \\ &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2 \\ &\quad - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^3\left[\frac{m^2}{E^2} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{L}{E}\right)^2\right] \boxed{m > 0}\end{aligned} \tag{5.12}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = \left(\frac{L}{E}\right)\frac{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}{r^2} \qquad \boxed{m > 0} \tag{5.13}$$

となる。

ここで、(5.8) 式の極限 $m \to 0$ をとろう。質量がゼロになるような極限で光の運動を表す：

$$\frac{dr}{dt} = \pm\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left[1 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{b_{\text{light}}^2}{r^2}\right]^{1/2} \qquad \boxed{\text{光}} \tag{5.14}$$

$$r\frac{d\phi}{dt} = \pm\frac{b_{\text{light}}}{r}\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \qquad \boxed{\text{光}} \tag{5.15}$$

上の 2 つ目の式の左辺に r をかけておいた。なぜならシュワルツシルト記録係が計算すると、積 $r(d\phi/dt)$ が半径方向に垂直な速度成分だからだ。(5.14) 式と (5.15) 式は、記録係座標 r, ϕ, t で表した、自転していないブラックホールの近くにおけるフラッシュの運動方程式である。初期半径 r と初期角度 ϕ で始まって、遠方時間 t で進み、r と ϕ の変化を計算することで光のフラッシュの完全な軌道を計算することができる。

記法：衝突パラメータ b が光のものであることを忘れないように付けていた式中の添字 $\boxed{\text{光}}$ をこれから先は付けない。

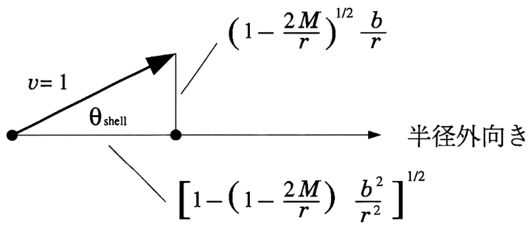


図 5.3 半径 r にいる球殻観望者によって観測される光の速度ベクトルとその成分。球殻観測者は光速が標準的な速さ 1 であることを測定する。

$$(\text{記録係の計算した光速}) = \left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\phi}{dt}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$= \left(1-\frac{2M}{r}\right)\left[1+\frac{2Mb^2}{r^3}\right]^{1/2} \qquad \boxed{\text{光}} \quad (5.16)$$

が得られる。

ブラックホールから遠く離れた距離 r（$2M/r \to 0$ の極限）で、光速の計算値は平坦時空で直接観測される値 1 に近づく。しかしブラックホールに近づくと、この r, ϕ, t 座標系の光速は減少し、地平線で 0 に近づく。

局所的観測者が直接測定すると、光速は遅くならない。遅くなるのは記録係の計算上でのことである。それにもかかわらず、遠方の観測者が電波を駆使して太陽表面を注意深く観測するとその予測が確かめられる。プロジェクト E 「太陽近くで遅くなる光」で述べる。

球殻観測者と落下観測者が測定すると、光速は $v=1$ である。

直接光速を測定するのは球殻観測者と落下観測者である。球殻観測者が光速を測定すると 1 になることは既に見た（(5.6) 式）。(5.14) 式と (5.15) 式を球殻測定値に変換する。公式集の (C) 式と (D) 式を使って、球殻観測者の光の速度の半径方向と方位角方向の成分を求める：

$$\frac{dr_{\text{shell}}}{dt_{\text{shell}}} = \pm\left[1-\left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{b^2}{r^2}\right]^{1/2} \qquad \boxed{\text{光}} \quad (5.17)$$

$$r\left(\frac{d\phi}{dt_{\text{shell}}}\right) = \pm\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{1/2}\frac{b}{r} \qquad \boxed{\text{光}} \quad (5.18)$$

図 3 に示したように、これらの成分の 2 乗の和が 1 に等しいことに注意しよう。

自由浮遊軌道運動または落下している観測者はブラックホールの周りを軌道回転するかまたはブラックホールめがけてまっすぐに落下するとき、推進力のない宇宙船である平坦時空のカプセルで守られており、光速が 1 に等しいことを測定する。

5.5 光の軌道の予想

コンピュータに衝突パラメータを入力せよ。さあ、発射、発進だ。

コンピュータで光の軌道をプロットせよ。

それぞれ dr と $d\phi$ について (5.14) 式と (5.15) 式を解くことができる。コンピュータで積分し、光のパルスの軌道を記録係座標 r, ϕ, t で求めることができる。遠方の光源からくる光に対しては衝突パラメータ b を直接知ることができる。それに対して、もしフラッシュを球殻から発光すると、b の値は間接的に求めなければならない。例題 1 ではこの過程を具体的に設定している。

軌道の分析をすぐに行なおうとすれば、有効ポテンシャルが必要になる。

球殻から発射されたレーザーパルスはブラックホールから脱出できるだろうか。事象の地平線の外側から出発すればどんな光のフラッシュでも脱出するのに十分なエネルギーを持っている。しかしながら、パルスは地平線を横切る軌跡に沿って進んでいるかもしれず、そのときは捕捉される。脱出か捕捉か。それを決めるために、これまで我々はたった一つの方法しか使ってこなかった。(5.14) 式と (5.15) 式を積分することだ。5.6 節で述べることだが、有効ポテンシャルを使うという別の方法では、どんな光の運命も即座に定性的に判断することができる。

5.6 光の有効ポテンシャル

一目でわかる光の軌跡。

有効ポテンシャルをどのように定義するのか。

第 4 章で質量のある粒子に対して単純で直接的に軌跡を視覚化する方法を述べたが、光の有効ポテンシャルを作る方法はあるのか。それにしても有効ポテンシャルとは何か。質量のある粒子の有効ポテンシャルを定義するために、以前、半径方向の式を使った (168 ページの (4.30) 式と (4.31) 式)：

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \left(\frac{E}{m}\right)^2 - \left(1-\frac{2M}{r}\right)\left[1+\frac{(L/m)^2}{r^2}\right]$$
$$= \left(\frac{E}{m}\right)^2 - \left(\frac{V(r)}{m}\right)^2 \qquad \boxed{m>0} \qquad (5.23)$$

(5.23) 式は有効ポテンシャルの作り方を示している。この式の左辺は粒子の半径方向の速度の測定量である。右辺は 2 つの項の代数的な差である。つまり第一項は運動の定数で、粒子の位置と独立である。第二項は半径に依存する。

フラッシュについて、似たような運動方程式を求めよう。このようなパルスの半径方向の式に類似した形は (5.14) 式によって与えられる：

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(1-\frac{2M}{r}\right)^2 - \left(1-\frac{2M}{r}\right)^3\frac{b^2}{r^2} \qquad \boxed{光} \qquad (5.14)$$

例題 1 レーザー砲

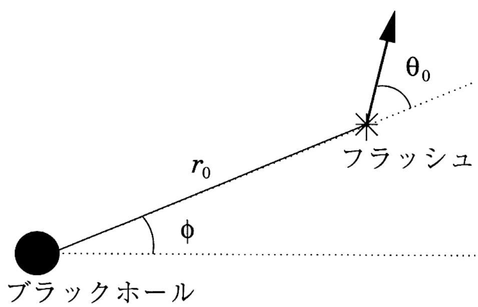


図 5.4 光のフラッシュが、球殻座標の外向きの半径方向から測って角度 $\theta_0 = 30$ 度で発射される。

換算円周 $r_0 = 10M$ の球殻上の司令官が、球殻座標で真上から $\theta_0 = 30$ 度の方向に向けてレーザーパルスを発射する。光パルスの軌道を計算する方程式をたてよ。

解答

衝突パラメータ b の値が必要だ。問題の内容から、その値が無限遠で測られたものではないことがわかる (図 2)。そこで (5.18) 式の左辺つまり、光速の方位角成分 (真横) に図 4 の角度 θ_0 から計算される値を代入することによって b の値を求めよう。球殻における光速を 1 とすることで

$$1 \times \sin\theta_0 = r_0 \left(\frac{d\phi}{dt_{\text{shell}}}\right) = \left(1 - \frac{2M}{r_0}\right)^{1/2} \frac{b}{r_0} \quad \boxed{光} \qquad (5.19)$$

が得られ、これから

$$b = \frac{r_0 \sin\theta_0}{\left(1 - \dfrac{2M}{r_0}\right)^{1/2}} = \frac{10M \sin 30°}{\left(1 - \dfrac{2M}{10M}\right)^{1/2}}$$
$$= \frac{10M \times 0.500}{(0.8)^{1/2}} = 5.59M \quad \boxed{光} \qquad (5.20)$$

となる。

1 ステップずつ進めて計算をするために、(5.14) 式と (5.15) 式を書き換えて

$$dr = \pm\left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^3 \frac{b^2}{r^2}\right]^{1/2} dt \quad \boxed{光} \qquad (5.21)$$

$$d\phi = \pm\frac{b}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt \quad \boxed{光} \qquad (5.22)$$

とする。これらの 2 つの式に正負の符号があるのは、平方根をとった結果である。具体的には、初期状態での符号は図 4 の発射角 θ_0 の値と方向から選ばれる (223 ページの例題 3 の角度における曖昧さへの注意を見よ)。

(5.21) 式と (5.22) 式は球対称引力中心の影響のもとで運動している光に使うことができる。この例題の特別なな場合の軌道をプロットするために、$b = 5.59M$ を代入し、コンピュータで数値的に積分せよ。

(5.14) 式の右辺の最初の項は、粒子の半径と独立な定数であるという要請とは相容れない。したがって、このままではこの式から有効ポテンシャルを定義することはできない。しかし、(5.17) 式を見ると、右辺の第一項に定数を見出すことができる：

球殻半径方向の方程式から有効ポテンシャルは得られる。

$$\left(\frac{dr_{\text{shell}}}{dt_{\text{shell}}}\right)^2 = 1 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{b^2}{r^2} \quad \boxed{光} \qquad (5.17)$$

この式の中の「運動の定数」は衝突パラメータ b である。b を右辺の第一項に入れるため、両辺を b^2 で割る：

$$\frac{1}{b^2}\left(\frac{dr_{\text{shell}}}{dt_{\text{shell}}}\right)^2 = \frac{1}{b^2} - \frac{\left(1-\dfrac{2M}{r}\right)}{r^2} \qquad \boxed{\text{光}} \quad (5.24)$$

光の有効ポテンシャル

この式の左辺は（何とも奇妙だが）粒子の半径方向の量である。右辺の最初の項は b を通じて軌道の選び方に依存しているが、シュワルツシルト幾何学にはよらない。右辺の第二項はシュワルツシルト幾何学にはよるが軌道の選び方にはよらない。この第二項は有効ポテンシャルの 2 乗のように振舞う：

$$\left(\begin{array}{c}\text{光のフラッシュの}\\\text{有効ポテンシャル}\end{array}\right)^2 = \frac{\left(1-\dfrac{2M}{r}\right)}{r^2} \qquad \boxed{\text{光}} \quad (5.25)$$

光のすべての振動数に対してたった一つの有効ポテンシャル

有効ポテンシャルに対する (5.25) 式には 光のエネルギーや衝突パラメータ b について何の言及もない。したがってすべての波長の光に適用できる。すべての波長の光（電波からレーダーパルス、ガンマ線まで）の運動を分析するには、たった一つの有効ポテンシャルだけでよいのだ。有効ポテンシャルの 2 乗のプロットを図 5 に示した。

この有効ポテンシャルを使うと、自転しない球対称引力中心の周りにおける光の運動の主な性質を簡単にしかも即座に予測することができる。

定性的な予測は簡単である。半径方向の運動のおかしな量であっても。

(5.24) 式には明らかな欠点が 1 つある。左辺には余分な係数 $1/b^2$ がついているが、いつものシュワルツシルト記録係座標 r, ϕ, t の速度ではなく、球殻座標の半径速度がある。球殻速度が局所的に測定できる「実在」のものであることはよいことなのだが、球殻座標は、半径座標 r の狭い範囲でしか使えない局所的な座標であるという都合の悪いこともある。**質問：**局所的な球殻における速度の測定値が何の役に立つのだ。**答え：**(5.24) 式と結果のグラフ的なプロットは大域的なレベルでも、光の運動を定性的に理解するための手助けとなるのだ。以下のように言ってもよいだろう：「最初に光のパルスが中心に向かって進む」「ある特別な半径 r でフラッシュ速度の半径成分は 0 になり、方位角方向に動く」「最終的に光のパルスは大きな半径へと飛び去って行く」このように運動を定性的に理解できるようになると、(5.21) 式と (5.22) 式に基づいた計算を行うことにより、より守備範囲の広いシュワルツシルト記録係が座標 r, ϕ, t で表される軌跡の記録簿をつくることができる。

光の b の値に対していろんな種類の軌跡。

図 5 に光の有効ポテンシャルの 2 乗の振舞いを示した。これは、$r = 3M$ で最大値 $1/(27M^2)$ をとる。いろいろな $1/b^2$ の値に対応する水平線が引かれている。(5.24) 式にしたがうと、光のビームが有効ポテンシャルのピークよりも大きな値をとれば（十分小さな衝突パラメータ b）、光はブラックホールに捕捉される。それに対して、$1/b^2$ が有効ポテンシャルよりも小さい値（十分大きな衝突パラメータ b）をとれば、$1/b^2$ の値が有効ポテンシャルと等しくなるような半径 r で光の速度の内向きの成分は 0 になる。この場合、

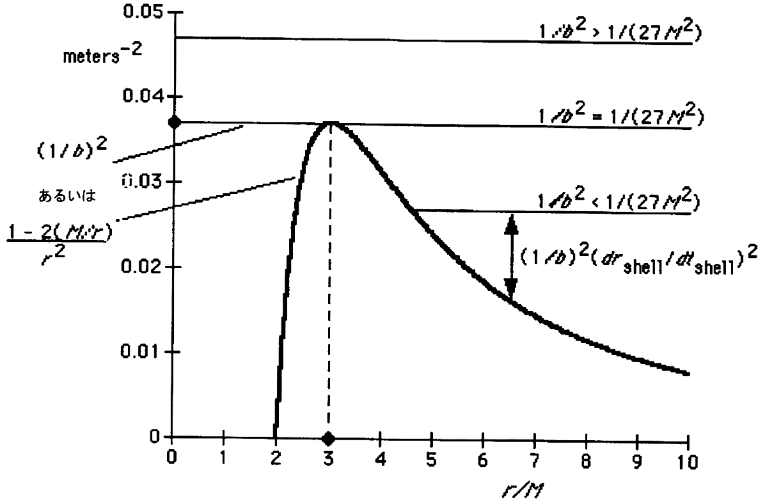


図 5.5 コンピュータ出力：ブラックホール付近の光に対する有効ポテンシャルの **2** 乗。同じ有効ポテンシャルがすべての周波数で成り立つ。このポテンシャルには最小値が存在しないため安定な光の円軌道もない。いろんな $1/b^2$ の値に対応する軌道が水平線で表されている。衝突パラメータ b が小さいと（$1/b$ の十分大きな値：上の水平線）、光はブラックホールに入る。衝突パラメータ b が大きいと（$1/b$ の十分小さい値：下の水平線）、落下する光の速度の半径成分は符号を変え、無限遠に飛び去る。臨界衝突パラメータ（$b_{\mathbf{critical}} = 27^{1/2}M = 5.20M$, 有効ポテンシャルの頂上をかすめる線）に対して、光は $r = 3M$ のナイフエッジ円軌道に入り、ブラックホールの周りを少し軌道回転するかもしれないし、何回転もするかもしれないが、最後には落ち込むか飛び去る。図 **6** は **3** つの軌道を図式的に表している（注意：ここで、有効ポテンシャルの **2** 乗をプロットし、第 **4** 章 では質量のある粒子に対して、有効ポテンシャル自身をプロットした）。

光はその後ふたたび外に向いて運動しブラックホールから飛び去って行く。これらの結果を図 6 に別の形で表した。

$r = 3M$ におけるナイフエッジ上の光の軌道

最後に、もし $1/b^2$ がちょうど有効ポテンシャルのピーク値と等しいとき、または言い替えれば $b = b_{\text{critical}} = (27)^{1/2}M = 5.20M$ のとき、パルスの半径運動は座標半径が $r = 3M$ に達するある時刻で止まる。しかし方位角方向は止まらず、光はしばらく円軌道上を動く。ナイフエッジ軌道上をふらつきがなら、この半径上を 1 周の何分の 1 か、それとも何周も留まるかもしれない。そしてフラッシュは遠くへ去るか、ブラックホールに落下するかを選択する。どちらになるかは、そのときどきで違う。フラッシュがこの軌道にどのようにたどり着くかに極端に敏感だからだ。尖った芯でバランスをとって立っている鉛筆がどの方向に倒れるかという問題と似たところがある。

5.7 光の運動のシュワルツシルト地図

どんな観測者が観測しても視野は広くない。

軌道の大きさと形は b だけに依存する。

質量 M の球対称の引力中心の影響のもとで運動するフラッシュの軌道の大きさと形はありがたいことに、たった一つの量、衝突パラメータ b にのみ依存する。

「シュワルツシルト地図」で軌道を表せ。

ブラックホール近くのフラッシュの軌道は、有効ポテンシャルを使うことで 簡単な形になる。例えば図6は衝突パラメータ b の3つの値に対して光の軌道を**シュワルツシルト地図**として描いた図である。シュワルツシルト地図は3つの光の軌道をシュワルツシルト記録係座標 r と ϕ の関数として表している。図5では、有効ポテンシャルを使い、3つの軌道の半径方向の運動を線で示している。

これらの図から、どんなパルスの軌跡も定性的に表すことができる。(5.14) 式と (5.15) 式を積分することにより、より正式でそして正確な軌道のシュワルツシルト地図が得られる。

例題 2 光のフラッシュの脱出？

213 ページの例題1で表されるレーザーパルスはブラックホールから脱出できるか。

解答
そのパルスの衝突パラメータは $b = 5.59M$ である。この値は臨界衝突パラメータ $b_{\text{critical}} = (27)^{1/2}M = 5.20M$ よりも大きい。その結果、パルスはブラックホールから脱出する。
有効ポテンシャルの明解さと威力はこの例題が短いことで目の当たりにできただろう。この例題はこの本で最も短い。

シュワルツシルト地図は球殻観測者が目の当たりにするものを予測しない。

図5と図6からでは決して、ブラックホール近くの球殻に立つと何が見えるのか、また光がどんな色になっているかはわからない。これらの図はシュワルツシルト地図に焦点を絞っており、座標 r, ϕ, t を使ってシュワルツシルト記録係の記録簿の記載事項から構成される人工的なプロットである。球殻観測者は、これらの光のビームの運動の方向について、シュワルツシルト記録係と同意しない。球殻観測者は記録係と光速の値ですら一致をみない。球殻に立ったとき、実際に我々が目にするものがこれ以降の節の主題である。ここで、遠方の記録係によってプロットされる光の軌道を追加してシュワルツシルト地図を調べよう。

具体的な例として、いろんな方向から $r = 3M$ の点に収束する光のビームを考えよう。この点を図7に白丸で示した。水平線上にある遠い星からの光のビームが右からまっすぐやってくる。ブラックホールのちょうど後ろは左になるが、それらの星からやってくるビームは外向きの半径方向に対して90度の角度で上または下からこの点に到達する（図5で示したように、$1/b^2$ 水平線が有効ポテンシャルの頂上をかすめるところで、速度の半径成分は0になる）。角度で前（右）の方にある星からの光は、外向きの半径方向に対して90度以下の角度で上下から到達する。水平軸の周りに図7を回転することによっ

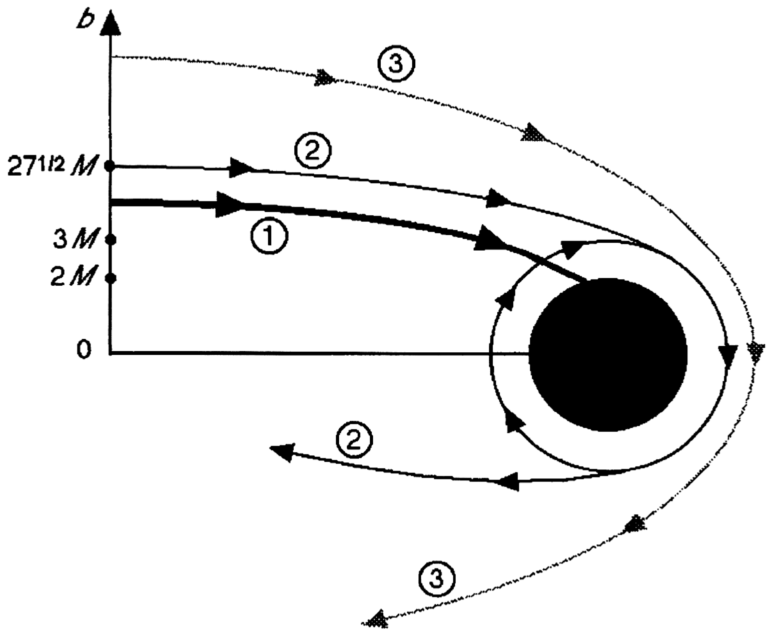


図 5.6 215 ページの図 5 で示した 3 つの衝突パラメータ b の値に対する光の軌跡の図式的なシュワルツシルト地図。 **1.** b の値が臨界値 $27^{1/2}M$ よりも小さいと光は捕捉される。 **2.** 臨界衝突パラメータに対して、光は $r = 3M$ の不安定な軌道上でゆらゆら揺れる。最後には、光はブラックホールに突入するか、または無限遠に脱出する。 **3.** 衝突パラメータが大きいと、光の軌道は曲げられるが捕捉されない。

てすべての方向からやってくる光の到達方向を知ることができる。

球殻観測者によるブラックホールの眺め

外向き半径方向から 90 度よりも大きな角度で到達する光についてはどうか。一つの例として、90 度以上の角度で白丸の点を発って、ブラックホールに落ち込んでいる光が示されている。逆をたどって、90 度以上の角度で光が到達するためにはブラックホールから出てこなければならないのだが、光またはその他の物体にそんなことができるはずはない。よって、$r = 3M$ の点では、光は 90 度より大きな角度からの光を受け取ることはできない。5.9 節で、$r = 3M$ の球殻で立っている観望者にはブラックホールの端が真上の方向から 90 度に見えることを示す。

ブラックホールの周りの「後光」

光の有効ポテンシャルから、その他にも一般相対論で特徴的なことが予測できる。図 5, 図 6 から光のビームが臨界衝突パラメータ $b_{\mathrm{critical}} = (27)^{1/2}M$ でブラックホールに近づくとき、$r = 3M$ がナイフエッジ軌道の半径である。しかし、あらゆる星から届いた波面のうちこの臨界衝突パラメータでブラックホールに近づくものがいくつかある。したがっ

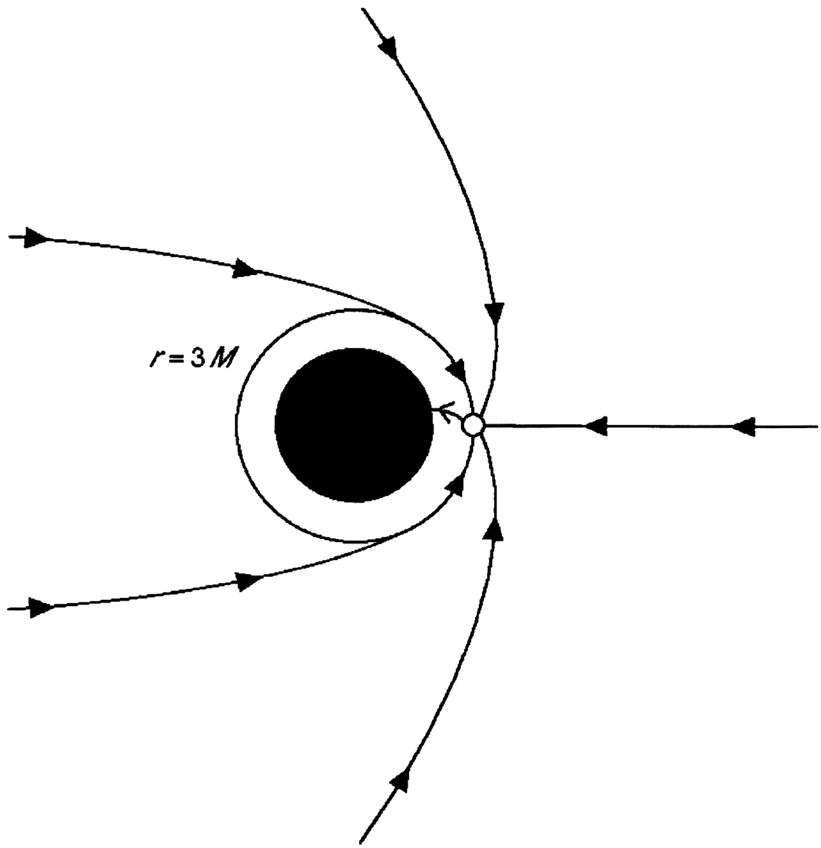


図 5.7 $r = 3M$ の軌道上の点で収束し吸収される光の軌道の図式的なシュワルツシルト地図。

て、見える星はすべてブラックホールを $r = 3M$ で回る光の球殻に寄与し、各々のビームは少なくとも一時的には束縛される。これらのビームはシュワルツシルト地図において 90 度の角度でその半径に到達する。以下の節では、この球殻の上の観望者には真上から測って ±90 度でたどり着くビームも見えることを示す。言い替えれば、$r = 3M$ にいる観望者には、すべての星が細く明るい環の中に散りばめられているのが見える。この明るい環はブラックホールの像の周りの後光（ハロー）となる。この章の 5.11 節で同じような像を見る。その節では「空を 2 分するすさまじい環」と呼んでいる。

「光球」 これらの結果はいわゆる光球上の $r = 3M$ の受信点に適用できる。他の半径の球殻上の点でも、ブラックホールは後光に囲まれるであろう。しかし星からの光は $r = 3M$ のときとは別の角度で到達するため、空の眺めは全く違ったものになるだろう。例えば、図 8

は一つの星からやってくるいろんな方向の光が、小さい白丸で表される球殻上の固定点に到達するところを表している。球殻観測者が周りを見まわすと、この一つの星はいろんな方向に見える多重像になる。

5.8 シュワルツシルト地図 vs 球殻の眺望

地図が違えば方向も違う。

球殻上の観測者とシュワルツシルト記録係が、2 つの事象 A, B を通る光のフラッシュの経路をたどる（図 9）。球殻観測者は真上から測って θ_{shell} の角度で通り過ぎていく光のフラッシュをたどる。シュワルツシルト記録係が記録すると、光のビームはどんな角度 θ_{Schw} で進むことになるのか。換算円周の定義から（第 2 章 2.4 節）、2 人の観測者は方位角方向の変位 $rd\phi$ については同意する。しかし、これらの球殻の半径方向の間隔については互いに食い違う。

記録係と球殻観測者ではフラッシュの方向が食い違う。

シュワルツシルト記録係が計算するのは

$$\tan\theta_{\text{Schw}} = \frac{rd\phi}{dr} \tag{5.26}$$

によって与えられる角度である（図 9）。球殻観測者は球殻の半径方向の間隔が dr でなく、むしろ dr_{shell} であると主張するだろう。よって球殻観測者にとって角度の接方向は

$$\tan\theta_{\text{shell}} = \frac{rd\phi}{dr_{\text{shell}}} \tag{5.27}$$

である。しかし、半径方向の 2 つの距離の間の関係はこの本の終わりの公式集の (D) 式によって与えられる：

$$dr_{\text{shell}} = \frac{dr}{\left(1 - \dfrac{2M}{r}\right)^{1/2}} \tag{5.28}$$

したがって、2 つのタンジェントの関係は

記録係と球殻観測者に対する光の軌跡の間の角度

$$\tan\theta_{\text{shell}} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} \tan\theta_{\text{Schw}} \tag{5.29}$$

となる。タンジェント 90 度は無限大であるため、球殻観測者の見込む角が 90 度のとき、シュワルツシルト角も 90 度である。

この章の残りでは球殻角度 θ_{shell} を主に扱う。図 7 と図 8 のようなシュワルツシルト地図の結果をプロットするためには、(5.29) 式の角度の変換が必要になる。

(5.29) 式の導出では、運動物体が光のフラッシュであることに無関係であったことに留意すべきである。それは事象 A, B を運動する物体粒子であるかもしれないし、その 2 点の間を伸びる釣糸なのかもしれない。これらすべての場合で結果は同じになる。一つの基

角度の間の関係は一般的である。

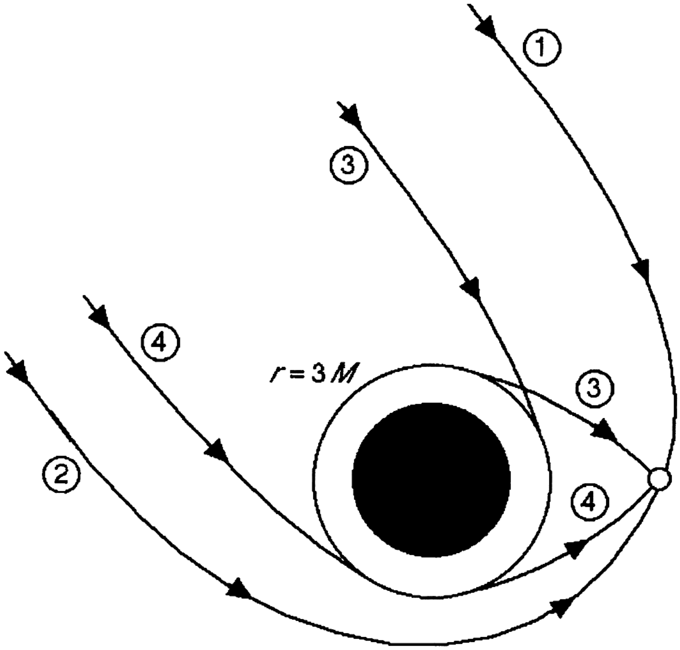


図 5.8　1 つの星の多重像ができていることを示している図式的（計算していない）シュワルツシルト地図。遠方の星から届いた光が実質的に平行な経路に沿ってブラックホールに近づいている（ここでは左上から近づいている）。これらのビームはブラックホールの周りの他の軌跡を通って観望者（○）に到達することができる。星の光が通る平行な経路のうち 4 つが、ここで調べるために選ばれ、番号で表示されている。光線 1 は観測者にたどり着く最も直接的な経路である。遠い距離からきた第 2 の光線が経路 2 であり、第 1 の光線の反対側を進み、ブラックホールの縁を通る。しかしブラックホールに近づいたため、大きく曲げられている。光線 3 は半径 $3M$ を 1 周または何周か時計回りに回る。この光線のほとんどは最終的にはブラックホールに落ちるか、さまざまな軌跡を通って無限遠に脱出する。光線 3 はほんのわずかな割合しか脱出できず、観測者にはあまり多く届かない。同じように、光線 4 はブラックホールを反時計回りに回り、4 番目の遠い星の像になる。つまり球殻観測者はいくつかの方向に同じ星の多重像を見る（5.8 節を見よ）。上の図の中の経路 1 と 2 に対応する遠い銀河の二重像は地球から観測されている。いずれの場合も、我々とクエーサー像の間にある重力中心が低輝度銀河や銀河団であると信じられている（図 14 のアインシュタインリングを見よ）。異なった星の像のそれぞれの明るさは軌跡付近にある空間の集光能力に依存する。互いに近い光線が経路を進んでいると、光線は集まるだろうかそれとも発散するだろうか。このような質問に答えることはこの本の範囲を超えている。

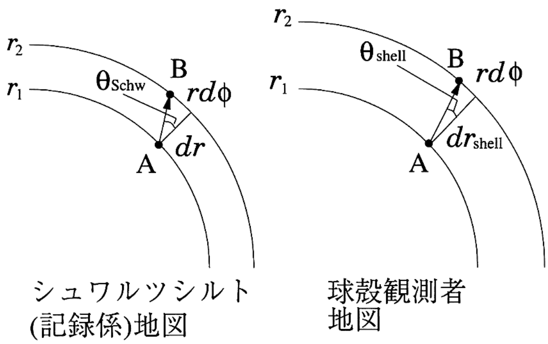


図 5.9　各観測者が、外向きの半径方向を基準として移動角度を測っている。両者は、近接する球殻間を光が移動するときに、方位角方向の変位が $rd\phi$ であることに同意する。しかし、この球殻間の半径方向の距離が同じであることには同意しない。球殻観測者が測ると半径距離は大きくなる。結果として球殻観測者が測定すると、外向き半径方向の運動の角度 θ は小さくなる。

準座標系で観測して、釣糸をかすめる光のビームや物質粒子はどんな基準系で測定しても釣糸をかすめていなければならない。(5.29) 式はシュワルツシルト角度と球殻角度の間の一般的な関係である、という意味で (5.26) 式から (5.29) 式までのどれも「光」のラベルを付けていない。

5.9　星を見上げると

球殻観測者が遂に見渡す。

ここまでで得た結果を用いると、いま我々は遂に立ち上がって見渡し、ブラックホールと頭上できらめく星を両目で眺めることができる（例題 3)。以下では**見ている**という誰かの経験を述べるために「観望者」または「観客」という語を使う。そのときは目で見てもよいし、カメラで写真を撮ってもよい。いつもそうであったように、**観測者**という言葉は、見ている人でなくて、むしろ**測定**する人のために使ってきた。つまり、局所的な格子棒と時計を使って事象のデータをとったり、またはシュワルツシルト記録係のようにこれらのデータをまとめる人である。

「観望者」と「観客」:目で見る人。

換算円周 r にいる球殻観望者が見るあらゆる光のビームの方向と衝突パラメータ b の間には 211 ページの図 3 で示したような一意的な関係がある：

$$\sin\theta_{\rm shell} = r\frac{d\phi}{dt_{\rm shell}} = \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{1/2}\frac{b}{r} \qquad \boxed{光} \quad (5.30)$$

ここで $\theta_{\rm shell}$ は換算円周 r にいる球殻観望者によって観測される光のビームの方向であ

星は衝突パラメータ b で決まる方向に見える。

り、真上を基準として測定されている角度である。(5.30) 式を使うと、衝突パラメータ b がわかっていれば、どんな半径 r の球殻から見ていても、すべてのビームの方向がわかる。(地平線を越えない限り) 光は経路に沿ってどの方向にも進むことができる。

図 11 に、サンプル軌道のシュワルツシルト地図が示してあり、二つの角度 ϕ と θ_{Schw} が強調してある。角度 ϕ は、引力中心が存在しなければ、球殻観測者が見たはずの方向を表している。角度 θ_{Schw} は、ブラックホールの存在している場合に球殻観測者にたどり着いた光の角度を遠いシュワルツシルト記録係が計算したものである (球殻観望者ではない)。

225 ページのボックスでは、球殻観望者が外を向いたとき、各星がどの角度 θ_{shell} に見えるかを予測できる光の軌跡を導出しており、ブラックホールが存在しないとしたとき、各々の星が見える角度 ϕ と比較している。図 13 はこの数値積分の結果を示していて、選んだ球殻半径 r_0 に対し、θ_{shell} の関数として ϕ が求められる。視野がブラックホールの外側にある遠い星に限られることに注意せよ。球殻観望者は真上から 90 度以下の角度に星の像を見るであろう。

図 11 の左上には 2 つの平行線がある。これらの線のうちどちらが星の方向を向いているのか。

両方の線は同じ方向、つまり星の固有な方向を向いている。星からの光を波と考えよう。星はあまりに遠いので、ブラックホールにたどり着く前の入射波の波面は実質的に平坦で、図の左上では平行線に垂直である。入射波のある部分の光は直線上を進んできて (図 11 の左) 曲げられず、ブラックホールに直接突入する。図に示された球殻観測者は入射波のこの部分でなく、衝突パラメータ b 離れた部分を見る。

アインシュタインリング

ブラックホールのちょうど背後にある星は、どんな球殻観望者に対しても対称性により、全ての方向に同じように光を放っている。地平線近くの球殻上の観望者は、ブラックホールを取り巻く光のリングとしてその星を見るだろう。この像は**アインシュタインリング**と呼ばれる (227 ページの図 14 を見よ)。もっと一般的に、ブラックホールは非常に悪いレンズであり、背景にある星の多重像さえつくり出す。プロジェクト D「アインシュタインリング」を見よ。

光：青方偏移

遠い星から届いた光を球殻の住民が見ると、方向が変わることに加え、エネルギーも変わっている。星のエネルギーは球殻の観客が見ると、大きい値にずれる (いわゆる重力青方偏移)。このエネルギー変化の公式は 104 ページの (3.28) 式である。

アインシュタインはすでに認識していたことだが、どんな天体でもレンズのように作用することがある。しかしアインシュタインは、このような像が本当にできるのだろうかと疑っていた。なぜなら、像となる星と「レンズ星」がほぼ完全に一直線に並ぶ必要があるからだ。もし遠い天体と像をつくる天体が銀河であれば、配置は完全でなくてもよい。図 14 に、このような像、**アインシュタインリング** を示した。図 14 は光でなく電波で見た像である。「リング」は実際に遠い銀河が曲げられた像であり、光源の銀河と観測点、つま

例題 3 球殻から眺めたブラックホール

観望者が換算円周 r の球殻上に立っている。彼が見回すと空はブラックホールにどれくらい覆われているか。

解答

(5.30) 式から始める。まず（頭上から測って）球殻角度 θ_{shell} で外に向けてフラッシュを発光することを考えよう。図 5 と図 6 から、落下するにしても脱出するにしても、ナイフエッジ上をゆらゆら揺れながらブラックホールを回る光に対して、臨界衝突パラメータが $b_{\text{critical}} = (27)^{1/2}M$ であることはわかっている。かろうじて脱出するビームを発射することに対応する臨界角度は (5.30) 式にこの b の値 (b_{critical}) を代入することで得られる：

$$\sin\theta_{\text{shell critical}} = \sqrt{27}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{1/2}\frac{M}{r} \quad \boxed{\text{光}} \qquad (5.31)$$

真上から測って臨界角度よりも小さい角度で発せられた光はブラックホールから脱出する。臨界角度よりも大きいと光はブラックホールへ突入する。球殻観測者が目にするものを調べるために、これらの運動を逆にしよう。球殻観望者が (5.31) 式の臨界角度より大きな角度を見ると、真っ黒になっている。空の星すべては角度 $\theta_{\text{shell critical}}$ の半径の円錐の中に凝縮されている。図 10 は「パイ図」を表している。黒い領域は、球殻観望者がブラックホールを見込む角度の範囲を表している。3 次元では、各パイ型の領域は円錐になり、中心を通る水平軸の周りにパイ図を回転させることで得られる。

注意：(5.30) 式と (5.31) 式には曖昧さがある。サイン関数は角度 θ と $180° - \theta$ で同じ値になる。図 10 を見て、2 つの極端な場合を考えよう。場合 I：ブラックホールからずっと離れると（非常に大きな r）、(5.30) 式からサイン関数は 0 になり、臨界角度が 180 度であることになる。ブラックホールからずっと離れていれば、光のフラッシュをどんな方向に発しても、脱出できる。もちろん 180 度の、ブラックホールに直接進む方向は除く。場合 II：ちょうど地平線の外側でサイン関数は再び 0 に近づく。この場合臨界角度は 0 である。フラッシュを発して脱出できる角度は存在しない。もちろん、まっすぐ外向きでゼロ度付近の角度は除く。この小さい角度の範囲ですら、地平線では摘み取られる。分岐的な場合が $r = 3M$ で起きる。この半径では、(5.31) 式から臨界角度のサインの値は 1 になり、臨界角度は 90° になる。これを図 10 に示した。$r > 3M$ に対して（外向きの角度で測って）$90° < \theta_{\text{shell critical}} < 180°$ の範囲で θ の値を探せ。それに対して、$r < 3M$ では $0 < \theta_{\text{shell critical}} < 90°$ の範囲で $\theta_{\text{shell critical}}$ の値を探せ。

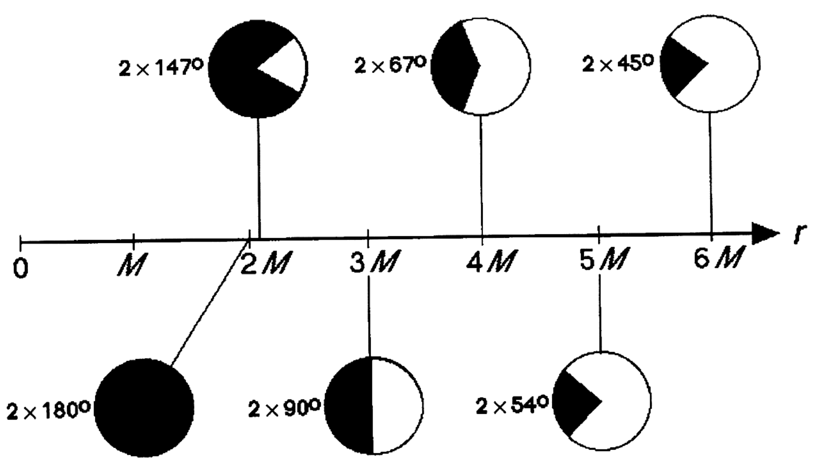


図 5.10 球殻からの眺めた「パイ図」。各々の円は、r 座標の球殻の 1 点から見えるパノラマ的な眺めを象徴的に表している。$2 \times 54°$ のように、図に記した角度は黒く見える部分を表しており、球殻観望者がブラックホールを見る角度または光のないことを経験する角度を表している。白い部分は、見えている空にある星のすべてから光線がやってきて圧縮される方向を表している。中心を通る水平線の周りに各パイ図を回転することで 3 次元にすることができる。$2M$ 以

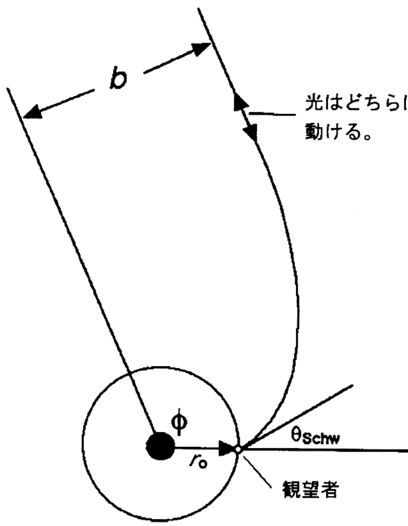


図 5.11 半径 r_0 の球殻で静止している観望者に遠い星から到達する光の軌跡の図式的シュワルツシルト地図。（この観望者によって発せられるパルスやレーザービームの軌跡と等しい）衝突パラメータ b は、光のビームが球殻と交わる（真上から測った）角度 θ_{shell} によって決められる。このシュワルツシルト地図上で角度 θ_{schw} を使うが、(5.29) 式は、この角度と球殻観測者が直接見る角度 θ_{shell} の関係を示している。(5.30) 式は、θ_{shell} と衝突パラメータ b の関係を示している。角度 ϕ は、近くに重力源がない場合に、球殻観測者が見るであろう遠い星の角度を表している。225 ページのボックスでは角度 ϕ についての十分な考察が行われている。

り地球を結ぶ線上にある銀河によって焦点が結ばれている。

図 14 は初めて観測されたアインシュタインリングである。この発見以来、いろんな波長の電磁波でリング（およびリングの一部）がたくさん見つかっている。この問題について、詳しくはプロジェクト D を見よ。

5.10 絶えることのない疑問

あまりに多い疑問、足りない時間

この章ではシュワルツシルト時空における光の運動の基礎とその運動を予測する方程式について述べてきた。さらなる予測は練習問題とこの章に続くプロジェクトで行う。ここでは、光の運動について考えられる疑問点のうちいくつかを述べ、そしてその答えについて解説しよう。

内側の眺め？

観望者がブラックホールの内側を見たとき、星空はどのように見えるのか。5.9 節では、

星々を頭上に見る

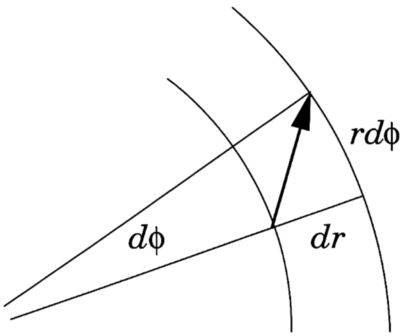


図 5.12 シュワルツシルト座標で、球殻観望者によって発光されたフラッシュの軌跡の小さな区間。

ブラックホールを中心とする球殻で立って星を見るためにはどの方向に目を向ければよいか。見えた星の方向は、ブラックホールが存在しないときに見える方向とどのように比較したらよいか。このボックスでは、これらの問題の答えを計算する方法を探る。

光は地平線を越えない限り、どの方向にも進むことができる。これから行う分析を簡略化するために、球殻観望者がレーザービームを外向きに発射すると仮定する。ビームは細く、一直線上に進み正確に星にたどり着くとする。ビームが発射された方向は、星から観測者へ光が進むと逆に考えれば、球殻司令官が星を目にする方向になるだろう。

ϕ が正で、外向きの運動に対し、(5.14) 式と (5.15) 式は

$$\frac{dr}{dt} = \left(1-\frac{2M}{r}\right)\left[1-\left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{b^2}{r^2}\right]^{1/2} \quad \boxed{光} \quad (5.32)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{b}{r^2} \quad \boxed{光} \quad (5.33)$$

と書き直される。(5.33) 式を (5.32) 式で割って dt を消去し、dr をかけると

$$d\phi = \frac{(b/r^2)dr}{\left[1-\left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{b^2}{r^2}\right]^{1/2}} \quad \boxed{光} \quad (5.34)$$

となる。

(5.34) 式から、レーザービームの軌道の半径方向の変化 dr に対して見込む角度方向 ϕ がどれだけ変わるかがわかる（図 12）。レーザービームの進む最終的な方向 ϕ を求めるため、球殻観測者の半径 r_0 から無限大の半径までの変化について和をとる（積分する）。211 ページの図 3 から、この式の分母が $\cos\theta_{\rm shell}$ に等しいことがわかる。$\cos\theta_{\rm shell}$ の値は $\theta_{\rm shell} = 90$ 度で 0 になる。したがって観測者が真上から 90 度の方向を見ると、この特別な計算においてやっかいなことが起きると思われる。このことがこの節での分析を外向きの半径方向、つまり真上の方向から 90 度以下に限る理由である。

積分の計算に備えるために、$u = M/r$ の置き換えをして (5.34) 式を簡単にする。すると

$$-\frac{M}{r^2}dr = du \quad \boxed{光} \quad (5.35)$$

となり、(5.34) 式の右辺の分子は

$$(b/r^2)dr = -(b/M)du \quad \boxed{光} \quad (5.36)$$

になる。これを (5.34) 式に代入すると

$$d\phi = \frac{-du}{\left[\frac{M^2}{b^2} - u^2 + 2u^3\right]^{1/2}} \quad \boxed{光} \quad (5.37)$$

になる。積分範囲は $u = M/r_0$ から $u = 0$ までである。この積分を実行するために、衝突パラメータ b の値が必要だ。(5.30) 式を、観望者が統括する球殻の半径 r_0 に適用する：

$$\sin\theta_{0\,\rm shell} = \left(1-\frac{2M}{r_0}\right)^{1/2}\frac{b}{r_0} \quad \boxed{光} \quad (5.38)$$

そして b/M について解くと

$$\frac{b}{M} = \frac{r_0}{M}\left(1-\frac{2M}{r_0}\right)^{-1/2}\sin\theta_{0\,\rm shell} \quad \boxed{光} \quad (5.39)$$

となる。

これより先の数値計算は以下のようになる。半径 r_0 の球殻観望者の観測角度 $\theta_{0\,\rm shell}$ から始めよう。(5.39) 式を使って $\theta_{0\,\rm shell}$ に対応する b/M の値を求める。(5.37) 式に b/M を代入し、数値積分を実行し、球殻観望者の真上の方向と遠い星の「本当の」方向の間の全角度 ϕ を求める。角度 ϕ の値から、観望者の下に引力中心がないときに観望者の見込む方向がわかる。図 13 に、球殻半径 r_0 の値をいくつか選び数値積分の結果を示した。

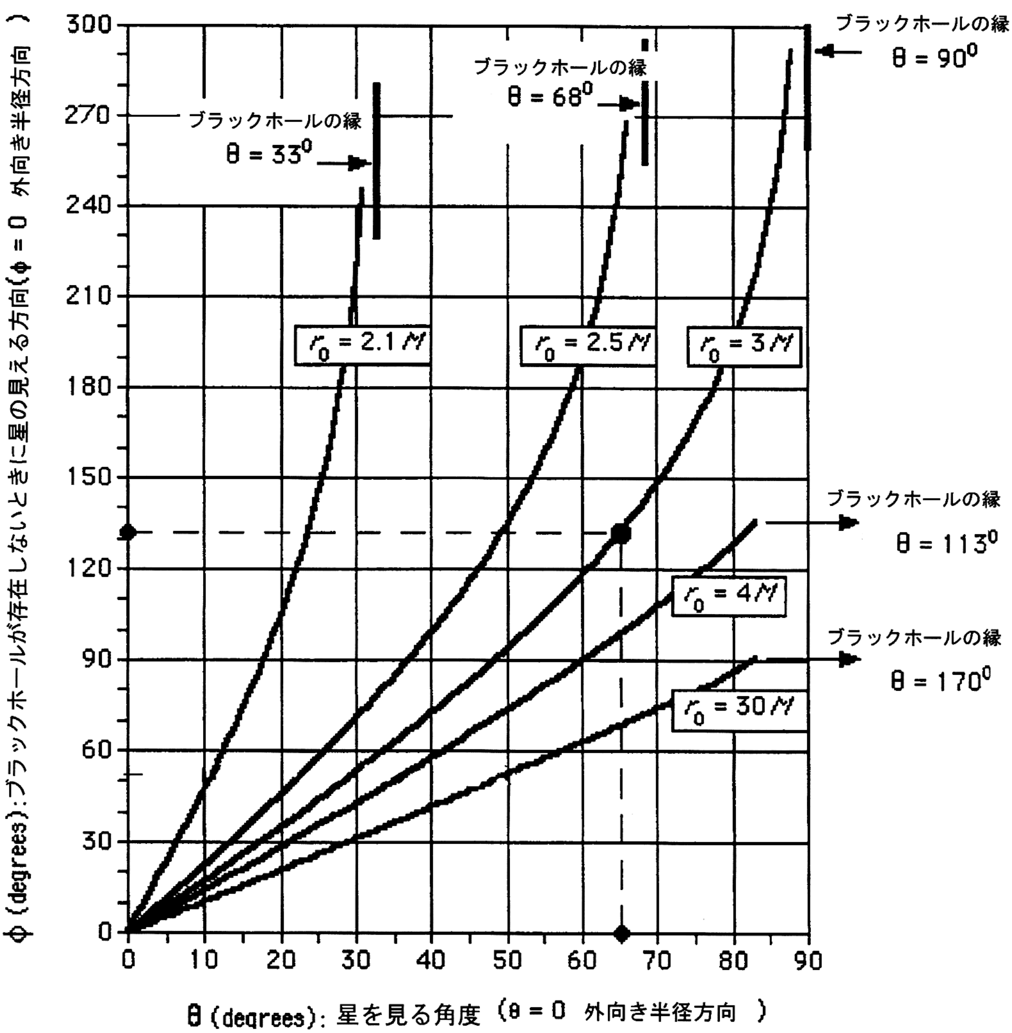


図 **5.13**　観望者が半径 r_0 に立ったとき、星を見る角度 $\theta = \theta_{0\ \mathrm{shell}}$（横軸）を関数とした、星の方向 ϕ （縦軸）のコンピュータプロット。図 **10** と図 **11** を見よ。両方の角度は外向き半径方向から測られている。例（破線）：$r_0 = 3M$ の球殻に立って **65** 度の方向（横軸上の点）に星を見ている。背後に重力源がなければ、この星は **132** 度の方向（縦軸上の点）に見えるだろう。グラフでは各 r_0 の値に対して、この球殻観望者にブラックホールの端が見える角度も示している。

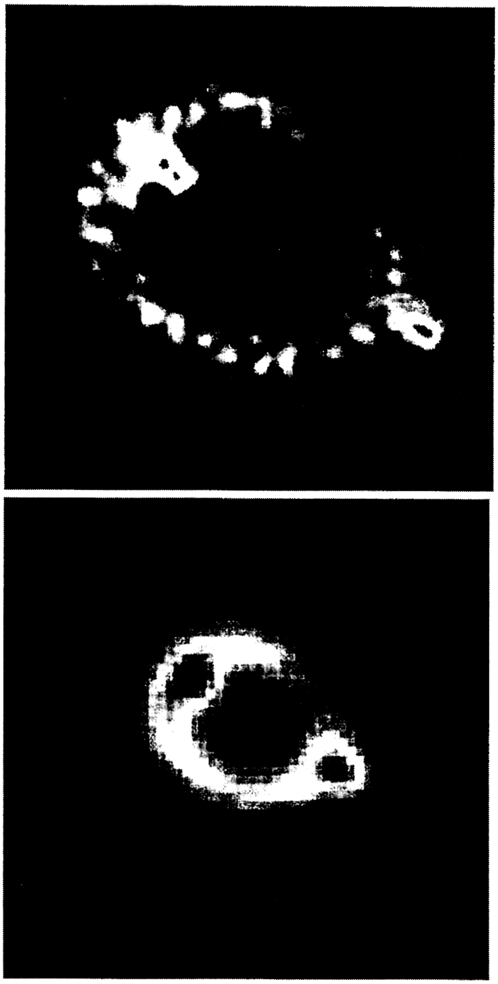


図 **5.14**　初めて観測されたアインシュタインリング。ニューメキシコ州のソコロにある超大型電波干渉計（**Very Large Array :VLA**）電波望遠鏡で、可視光でなく、**2** つの異なったマイクロ波周波数で発見された遠い電波銀河の像である。歪められた電波銀河と地球の観測者の間に前景の銀河があり、「真中に空いた穴」のように見える銀河の歪んだ像は、前景の銀河のあらゆる縁で曲げられたマイクロ波によるものである。前景のレンズ銀河は、電波の周波数では明るくないごく普通の銀河である。この前景の銀河は可視光でははっきりと見えるけれども、**VLA** では見えない。観測は **2** つのマイクロ波で行われた：**15** ギガヘルツ $= 15 \times 10^9$ サイクル毎秒（上の図）と **5** ギガヘルツ $= 5 \times 10^9$ サイクル毎秒。データは電波望遠鏡を使って得られた。電波望遠鏡には **Y** 字型の **3** つの足があり、各々の足の長さは約 **20** キロにおよび、足に沿って **27** 個の椀型アンテナが置かれている（謝辞と資料提供についてはこの章の終わりを見よ）。

球殻から上を向いて見える星の眺めを示した。その星々は、球殻観望者が真上から90度以下の角度に見える星である。内側、つまりブラックホールの方向にある星空がどのようになっているか疑問に思うこともあるだろう。黒い円盤の端が(5.31)式で与えられ、図10で示される、いわゆる臨界角度の方向に見える。しかし内側の眺めについて星の光の軌跡を計算することはかなり難しい。これらの像の他に、観望者にたどり着く前にブラックホールの周りを1回または数回まわってくるものがある（図8の経路3と4を思い出せ)。これらの軌跡は大きな曲率を横切っているために、経路を進むうちに光は絞られたり、発散することがある。これらの何周も回る経路をたどってやってくる星の像が十分見えるための強度を予測するためには、細い光のビームの経路を知らなければならないし、ほとんど平行なビームが曲がった時空によってどのように焦点を結んだり、発散したりするのかということを知らなければならない。周回する経路についての詳しい予測は専門的すぎるのでここでは扱わない。参照文献を見よ。

近くの天体の眺め？

近くの天体を見るためにはどこに目を向ければよいか。 外向きのレーザービームは星を向いて進む。または、その方向から我々の近くに届く光によって星を見ることができる(図11)。図13に例示したように、遠く離れた星を眺める場合、その星が平坦時空にあるため、球殻上で見える角度は、平坦時空（ブラックホールがない場合）でその星が見える方向で一意的に固定される（専門的には、225ページのボックスの積分を $r \to \infty$ まで実行する)。球殻近くにある天体を眺めると、状況は全く異なる。物体を見る角度はブラックホールがない場合に目を向ける角度だけに依存するのではなく、星が存在する球殻の r にも依存する（技術的には、225ページのボックスの積分は、我々が見ている物体の r の値まで行われるだろう)。我々が目を向けなければならない方向を予測するためには、事実上このような天体からの光の軌跡を個別に計算しなければならない。

軌道上の観望者の眺め？

軌道運動する観望者や落下者は遠い星の像をどの方向に見るだろうか。 ブラックホールを軌道運動するとき、または中心に向けてまっすぐ落下するとき、空はどのように見えるか。この質問は、いま光が通り過ぎている球殻の司令官が見る光の方向と振動数を知っていれば、地平線の外側の運動について答えることができる。特殊相対論の変換を使えば、球殻上で行なわれた観測と球殻を通り過ぎる観測者の観測を関連づけられる。これらの変換には**ドップラーシフト**（運動する観測者が見る光の振動数の変化）と**光行差**（運動する観測者が見る光の運動の方向における変化）が含まれている。球殻系で、軌道上にいる観測者の運動の方向を基準として角度を測定するとしよう。球殻観望者がある物体を見ようとして（物体が放ったフラッシュを見ようとして）進行方向から目を向けた角度を ψ_{shell} とし、E_{shell} を球殻で測ったフラッシュ光のエネルギーとする。球殻観測者の近くを軌道上の観望者が速さ v_{shell} で通り過ぎる。観望者は進行方向から測って ψ_{orbiter} の方向に物体を見て、エネルギー E_{orbiter} をもつ光のフラッシュを観測する。これらの関係は

$$\cos\psi_{\text{orbiter}} = \frac{\cos\psi_{\text{shell}} + v_{\text{shell}}}{1 + v_{\text{shell}}\cos\psi_{\text{shell}}} \qquad \boxed{\text{光}} \quad (5.44)$$

球殻上で焼かれる？

地平線に近い球殻上に立つと、中心へ向かう支え切れないほどの局所重力加速度によって潰されるだろう。それでもまだ恐怖を十分感じられなければ、そこでは電磁波に取り囲まれてもいることを知らせなければならない。ウンルー（William G. Unruh）は量子場の理論を使って、この輻射場の温度 T がケルビンの単位で

$$T = \frac{hg_{\text{conv}}}{4\pi^2 k_{\text{B}} c} \tag{5.40}$$

となることを示した。ここで、g_{conv} は通常の単位 メートル/秒 ^{2} の局所重力加速度、h はプランク定数で、c は光速であり、k_{B} はいわゆる**ボルツマン定数**で、その数値は 1.381×10^{-23} キログラム・メートル ^{2}/（秒 ^{2} ケルビン）である。量 $k_{\text{B}}T$ の単位はジュールであり、この輻射場が局所過程に与えることのできる熱エネルギーの平均値になる（平坦時空で g_{conv} の割合で加速すると、同じ輻射場に取り囲まれる）。

第 3 章の練習問題 9 で半径 r の球殻上の局所重力加速度の式を求めた。この加速度の幾何学単位はメートル $^{-1}$ である：

$$g_{\text{shell}} = \frac{g_{\text{conv}}}{c^2} = \frac{M}{r^2}\frac{1}{\left(1 - \dfrac{2M}{r}\right)^{1/2}} \tag{5.41}$$

(5.41) 式を (5.40) 式に代入すると

$$T = \frac{hc}{4\pi^2 k_{\text{B}}}\frac{M}{r^2}\frac{1}{\left(1 - \dfrac{2M}{r}\right)^{1/2}} \tag{5.42}$$

が得られる。ここで M の単位はメートルである。奇妙なことに、この温度は地平線 $r = 2M$ に近づくにつれて、限りなく増加する。したがって予想されることは、遠くの観測者には地平線近くの輻射場がどんな星よりも明るく見えてしまうということだ。しかし実際には、こんなことにはなっていないのだが、なぜか。その効果が弱められた形で起きるからだ。どんな重力中心でもそこから離れていくと、輻射は重力赤方偏移を受けることを思い出そう。この本の終わりの巻末公式一覧の (C) 式から、周波数はすべて $(1 - 2M/r)^{1/2}$ 倍の赤方偏移を受けるが、それは (5.42) 式の因子と打ち消し合う。代入した式で $r \to 2M$ としよう。遠くの観望者は

$$T_{\text{H}} = \frac{hc}{16\pi^2 k_{\text{B}} M} \tag{5.43}$$

の輻射温度を見る。ここで、M はメートルの単位である。温度 T_{H} は**ホーキング温度**（Hawking temperature）と呼ばれ、29 ページのボックスで述べたブラックホールからのホーキング輻射を特徴づける量である。この温度は、ブラックホールの質量 M が減少すると増えることに注意しよう。太陽質量の数倍のブラックホールではこの温度は極端に低く、遠くから見ると、ほとんど黒く見える。練習問題 10 を見よ。

(5.40) 式から (5.42) 式までの輻射場を見ても、特におかしなところはないのだが、奇妙な結論が得られる。たぶん、その中でも最も奇妙なところは、この輻射場が、半径 r の球殻を自由落下しながら通り過ぎる観測者には全く発見されないことであろう。落下者はこのような輻射場を見ないが、同じ半径の球殻観測者の周りには存在している。この見かけ上のパラドックスはこの本で扱う古典理論を使っても解決できない。Kip Thorne の *Black Holes and Time Warps: Einstein's Outrageous Legacy* 444 ページを見よ。

ブラックホールの地平線近くの球殻上で丸焼きにされる危険性はどのくらい真面目に受け取らなければならないのか。それに答えるため、輻射場が水の凝固点 273 ケルビンに等しい温度に到達する球殻の局所加速度を計算しよう。(5.40) 式から、$g_{\text{conv}} = 6.7 \times 10^{22}$ メートル/秒 ^{2} または地上の重力加速度の約 10^{22} 倍であることを示すことができる。明らかに、輻射によって丸焼きになるずっと前に重力によって潰されるだろう。

$$E_{\text{orbiter}} = \frac{E_{\text{shell}}(1 + v_{\text{shell}}\cos\psi_{\text{shell}})}{(1 - v_{\text{shell}}^2)^{1/2}} \quad \boxed{光} \quad (5.45)$$

で与えられる。(これらの式は、光が運動する方向と 180 度逆向きの方向を観測者が見るという事実を考慮に入れることで、*Spacetime Physics, Second edition* の 263 ページの練習問題 8-19 の式から得られる。その結果、もともとの式の中の cos を全て −cos に置き換えることで (5.44) 式と (5.45) 式が得られる)

地平線の内側からの眺め?

地平線の中の観望者には空がどのように見えるか。 我々は新しい領域に足を踏み込んだ。そこでは、球殻上の観測に頼った我々の分析は何の役にも立たない。地平線の中では落下は避けられず、静止した球殻は存在しない。しかし星からの光も地平線を通って、落下者には見える。地平線の内側における光の運動を分析するために必要な予備知識は、ブラックホールの中心にたどり着いたときに見える最後の眺めを表す公式とともにプロジェクト B 「ブラックホールの内側」で与えられる。以下の 5.11 節では最後の眺めやその他の視覚効果を述べる。

5.11 落下者の見る眺め

中心への浮遊

スーパーシネマ 2 本立て

空間と時間、運動量とエネルギー、惑星とブラックホールの世界について述べてきたこの章の締めくくりとして、オールスターキャストの最終パレードで祝おう。星の輝く大空を見つめるマーツナー (Richard Matzner)、ロスマン (Tony Rothman)、ウンルー (Bill Unruh) に案内してもらおう。非常に重く、非常に大きいブラックホールにまっすぐ自由浮遊すると、シュワルツシルト半径の地平線を越えた後でさえ、絶えず変化するすばらしい全光景をじっくり見る時間が、スーパーシネマ 2 本立ての時間と同じ、4 時間もある。相対論について習ってきたほとんどすべてのことは、特殊と一般のどちらも、この壮大なパノラマを正しく理解するのに役立つ。プロジェクト B の B.9 節にこれらの結果だけを予め示しておいた。

落下の最終段階

—マーツナー、ロスマン、ウンルー (Matzner, Rothman, Unruh) より

舞台設定として、10 億太陽質量 ($M = 10^9 M_{\text{Sun}} = 1.5 \times 10^9\text{km} = 1.6 \times 10^{-4}$ 光年=地球の軌道半径の約 10 倍) のブラックホールを考え、そこへ自由浮遊旅行することを想像しよう。このブラックホールの地平線の半径は上の数字の 2 倍であるが、ほぼ太陽系の半径に等しい。旅行はブラックホールの中心から $r = 20000M$ の距離で光速の 10 分の 1 で始まる。腕時計は最終的に特異点にたどり着く前まで使えるとし、その読みと半径 r で旅行中の各段階を記録する。

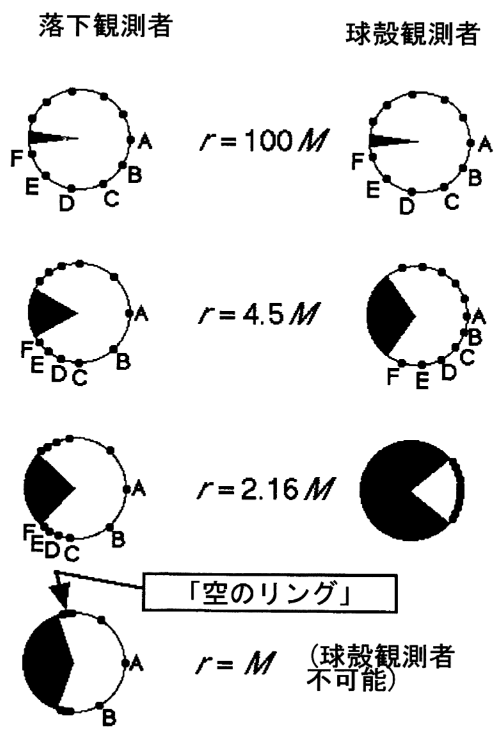


図 5.15 まっすぐ落下する観測者と球殻観測者が見るブラックホールと星の眺めの説明図。右側は旅行者が落下していく球殻からブラックホールを見たときのパイ図を表している（図 **10** と **(5.31)** 式を見よ)。黒い部分は、ブラックホールをいろんな距離で眺めたときに、ブラックホールを見込む角度である。これらの半径距離を真中に記した。左側はまっすぐに落下して通過していく旅行者が眺めたときのパイ図に対応する（**(5.44)** 式を球殻観望者に対する臨界角度 **(5.31)** に適用せよ)。**A** から **F** までの文字はブラックホールから離れた観望者から均等に見える星の方向を表している。$r = 100M$ では空の小さい部分だけが暗く、ブラックホールの近くにある星の位置だけが乱されている。地平線のちょうど外側の位置では、球殻観望者から見える空はほとんど暗い。星の像は、ブラックホールの周りで起きる光の湾曲によって歪められる。それに対して落下観望者はほとんど光速でこの球殻を通り過ぎる。その人にとって、前方から **90** 度の部分だけが暗く、星はあっと言う間にブラックホールに向かって進んで行く。地平線の内側である $r = M$ のところでさえ、落下観望者に対してはブラックホールは視界の半分も満たしていない。星の位置は一般的に止まっている観望者が見るよりも、運動する観望者が見る方が前方にずれる。これは見かけ上の星の位置の変化は観測者が速く運動することによる光行差の効果から主に生じることに注意しよう（**(5.44)** 式)。旅行の最後の数秒以内に、落下観測者の背後の空はブラックホールのために黒くなる。大空を後ろの半分と前半分を分けているのは明るいリングである。この図には、ブラックホールを **1** 周または何周も回る光からできる第二の像や、さらに高次の像の位置は示していない。(この図は **M. Sikora** の計算に基づいている。**M. Abramowicz** の好意に感謝する。)

終わりまで30年

旅行の始まり、最期まで 30 年。この時点でブラックホールはあまり印象的ではない。星のパターンがわずかに歪み、その中に真っ黒な円盤型の小さな領域（直径 1 度、つまり地球から見える月の大きさの 2 倍）がある。真っ黒な領域の縁の最も近くにある星を綿密に調査すると、円盤の反対側にもう一つの像があることがわかる。これらの像の存在が指摘されなければ、おそらくブラックホールを見落としていただろう。

あと 10 日

最期のときまで 10 日、$r = 32M$。像は非常に大きくなっている。今、前方には半径約 10 度（腕を伸ばして持ったときの皿の大きさ）の純粋に暗い領域がある。本来ならブラックホールの近くに見えるはずの星の像は約 15 度離れたところへ押し出される。暗い領域とこれらの星々の像の間に第 2 の像からできた帯がある。望遠鏡の力を借りて、暗い所をよく見ると、我々の背後にある第 2 の像が暗く見えるではないか。この光はブラックホールの周りを一周して我々の目に入って来ているのだ。

あと 4 時間

終わりまで 4 時間。いま地平線にやって来た。球殻速度はほとんど光速である。光行差の効果は極端に重要になっている。この瞬間から見えるものはすべて墓場まで持って行く秘密となるであろう。我々はもはやどんな情報も、外で生存している仲間に送ることが不可能なのだから。我々はブラックホールの「内側」にいるのだけれども、空が全体的に暗いわけではない。高速で運動しているため、光行差によって光線が極端な角度で目に到達する。実際、目の前の領域だけが十分暗く、90 度の角度を張り、前方の空のほとんどを覆っている。

我々の背後では星が暗く、疎らになり、ブラックホールの端へ運動して行く。見かけの星の運動は再び光行差の効果によって起きている（図 15）。しかし、上空にはもっと目だった特徴が現れる。ブラックホールを取り巻く空にはすべての星の第 2 の像が見える。これらの像は、ブラックホールの周りにある幅約 5 度の帯の中に押し込められる。ブラックホールに落下する光には青方偏移が起きるために、2 番目の像はもともとの星の像よりも今は明るくなっている。まだ明るい第 1 の像は第 2 の像のリングを取り囲んでいる。北極圏が地球の南北を走る軸を囲むように、リングは運動の方向を取り囲んでいる。第 1 と第 2 の像がともにつくり出した光の帯は現在 地球から見える普通の夜空の 10 倍の明るさで輝いている。

4 分

意識がなくなるまで 4 分、でもまだ $r = M/7$ **ある。**今ブラックホールを見ると 150 度の角度を覆っている。もうほとんど空全体である。背後の星は暗くなりながら、前方に急進している。星のわずか 20 % が後ろに残っている。ブラックホールの外縁を取り囲む幅 10 度の帯の中に、今は第 2 の星の像だけでなく、第 3、第 4 の像も見える。空を駆けめぐるこの星の帯は今や地球から見える夜空よりも 1000 倍輝いている。

最後の数秒間。

最後の数秒間。星の帯が急速に細くなっていくことを除き、空はどこでも暗くなった。明るい星の帯は完全に我々の運動方向に対し垂直に広がっている。意識がなくなる 3 秒前で地球から見える月よりも明るく輝く。ブラックホールを何度も回る光が現れ、どんどん高次の像が見えるようになっていき、新たに見える星は収縮する帯の内側の端に現れる。星は圧縮され、星のリングはどんどん細くなり、宇宙の星々は明るくたくさん見えるよう

になる。

最後の 10 分の 1 秒以内だけで潮汐力が十分強くなり、すさまじいばかりのリングが現れ、空を二分し、我々の旅行は終わりとなる。

空を二分するリング

5.12 まとめ

フラッシュ光は**ヌル測地線**に沿って運動する。ヌル測地線は、局所的にまっすぐな世界線であり、その上のどんな 2 つの事象間の固有時でもゼロとなる（図 1）。この性質はブラックホールの近くでも変わらない。すべての球殻観測者とすべての局所自由浮遊観測者の測る光速は標準値 1 になる。それに対して、シュワルツシルト記録係の記録によると、ブラックホールの近くでは計算上の光速は 1 よりも小さく、半径方向と方位角方向で速度は違う：

$$\frac{dr}{dt} = \pm\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \qquad \boxed{\text{光、半径方向}} \quad (5.3)$$

$$r\frac{d\phi}{dt} = \pm\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} \qquad \boxed{\text{光、半径方向}} \quad (5.4)$$

地平線の近くで、両方の成分は 0 になる。これらの光速はシャピロ（Shapiro）とその共同研究者によって、太陽の近くを通り過ぎる電波で確かめられている（プロジェクト E「太陽付近で遅くなる光」を見よ）。

唯一の運動の定数である衝突パラメータ b によって、重力中心の周りの光の軌跡が特徴づけられる。遠くから来た光に対して、衝突パラメータの値は、光の初期の経路とそれに平行なテスト粒子の経路間の垂直距離であるが、テスト粒子の経路はブラックホールにまっすぐ落下するものでなければならない（208 ページの図 2）。ブラックホールの近くから出発する光の b の値を、局所球殻観測者が測った光の速度の方位角成分から求めなければならない（213 ページの例題 1）。

光の運動の定性的記述は、有効ポテンシャルと同じグラフ上に引いた定数 $1/b^2$ の線から容易に得られる：

$$(\text{光子の有効ポテンシャル})^2 = \frac{1 - \dfrac{2M}{r}}{r^2} \qquad \boxed{\text{光}} \quad (5.25)$$

臨界衝突パラメータ $b_{\text{critical}} = (27)^{1/2}M$ を持つ光のビームは、有効ポテンシャルのピーク上の不安定な臨界軌道上を回転することができる。臨界値よりも大きな衝突パラメータの光は最小半径にたどり着き、無限遠の距離に飛び去って行く。臨界値よりも小さい衝突パラメータの光はブラックホールに落下していく。太陽によって星の光が曲げられることが確かめられている（プロジェクト D「アインシュタインリング」）。

記録係座標 r, ϕ でプロットしたシュワルツシルト地図から、光の軌道を鳥瞰することができる。一人の観測者だけではこの軌道を直接測定できないのだが、このプロットか

ら、球殻観測者（5.8 節と 5.9 節）と自由浮遊軌道上の観測者（5.10 節）から見える視覚的パノラマがどうなるかを予測することができる。

5.13　参照文献と資料提供

始めの引用：ディキンソン（Emily Dickinson）『対訳ディキンソン詩集』亀井俊介訳 岩波文庫より。

図 14 はアインシュタインリングである。写真は Jacqueline N. Hewitt の好意による。超大型電波干渉計（the Very Large Array:VLA）は、全米科学財団（the National Science Fundation）と契約しているアメリカ国立電波天文台（National Radio Astronomy Observatory :NRAO）で稼働している。J. N. Hewitt, E. L. Tuner, D. P. Schneider, B. F. Burke, G. I. Langston, and C. R. Lawrence, "Unusual Radio Source MG1131-0456:A Possible Einstein Ring," Nature, Volume 333, 537–540 ページ（1988)。

図 5 は Charles W. Misner, Kip S. Thorne, John Archibald Wheeler, *Gravitation*, San Francisco（現在 New York）, 1973, 675 ページから使用した。

ブラックホールの近くで外側を眺めたときの景色については、Joachim Schastok, Michael Soffel, Hanns Ruder "Stellar Sky as Seen from the Vicinity of a Black Hole," *American Journal of Physics*, Volume 55, Number 4, 336–341 ページ（1987 年 4 月）

シュワルツシルトブラックホールによって曲げられた星の光の強度については、Hans C. Ohanian, "The Black Hole as Gravitational 'Lens'," *American Journal of Physics,* Volume 55, 428–432 ページ（1987）を見よ。

229 ページのボックス「球殻上で焼かれる?」の参照文献：歴史的な背景について、Kip S. Thorne, Richard H. Price, and Douglas A. MacDonald *Black Holes:The Membrane Paradigm,* Yale University Press, 1986, 280–285 ページ；Unruh, "Notes on Black-Hole Evaporation," Physical Review D, Volume 14, Number 4, 1976 年 8 月 15 日、870–892 ページ; William G. Unruh and Robert M. Wald, "What Happens When an Accelerating Observer Detects a Rindler Particle," Physical Review D, Volume 29, Number 6, 1984 年 3 月 15 日、1047–1056 ページ。

最後の突入の記述（5.11 節）は Richard Matzner, Tony Rothman, and Bill Unruh, "Grand Illusions: Further Conversations on the Edge of Spacetime," in *Frontiers of Modern Physics: New Perspectives on Cosmology, Relativity, Black Holes and Extraterrestrial Intelligence,* edited by Tony Rothman, Dover Publications, Inc., New York, 1985, 69–73 ページ。

Robert Wilson は、223 ページのボックスの記述で、ブラックホールの縁を眺めたときの球殻角度の不明確さについて指摘してくれた。Eric Sheldon と Joel Therrien は練習問題の「ブラックホールの影」のアイディアを提供してくれた。Mary Nickles は練習問題「ブラックホールからの距離の測定」のアイディアを提供してくれた。

第5章の練習問題

第 4 章と第 5 章の予備知識を持って、プロジェクト B「ブラックホールの内側」の 8–10 節に戻って解いてもよい。

思考探求問題

思考探求問題は自由回答形式の問題であり、答えがあったりなかったりし、考えた後でも定性的に答えられたり答えられなかったりする。定性的な答えが公式や数値と合わなかったとき研究が始まる。答えは原理的に実験でテストされるであろう。思考探求問題の典型的な方針は、実際の状況で生じる複雑な疑問を理想化された状況に適用し単純な問題に置き換えることである。幸運に恵まれたり、必死に考えることにより、単純化された答えが一歩一歩、より現実的な分析へと近づくのだ。

1. 光球からの眺め

光球と呼ばれる $r = 3M$ の球殻にあなたは立っている。接線方向、つまり、真上に対して垂直な方向を見ている。何が見えるか。自分の頭の後ろが見えるか。首を左右に回していろんな接線方向を見回すと、何が見えるか。星が見えるか。そうだとすると、どの星が見えるか。接線方向よりも下や上を見ると、何が見えるか。

2. ブラックホールの影

言い伝えによると、バンパイアは鏡に写らず、影がないことから見分けることができる。ブラックホールには影があるのか。距離によってはブラックホールの影ができたりできなかったりするのか。どんな実験をすればこれらの質問に答えることができるか。これらの実験でどんな結果が得られると予想されるか。

3. ブラックホールからの距離の測定

あなたは、ブラックホールに近づくかまたはその周りを巡行している宇宙船のパイロットである。ブラックホールにどれだけ近づいたかを知りたい。そのためにできる実験は何か。ブラックホールの質量 M は既知とする。レーザーやレーダー信号、星の眺めを使えば、自分の換算円周 r を知ることができるか。距離を決めるために、他の宇宙船の存在が必要か。それは静止しているか、または軌道運動している必要があるか。

4. 地平線の通過

ピート・ブラウンは初めの方の章にある記述「シュワルツシルト地平線を通りすぎても特別なことは起きない」(106 ページ) が気に食わない。彼が言うには「足が先に地平線を通過する。足が目よりも先に地平線に達するため、足は短時間で消えてしまうはずだ。目が地平線を越えると、足についてもそうだが、内側がどうなっているか知ることができる。だからスニーカーの紐を強く結ぶべきだ。そうしないと、暗闇に失うことになる」ピートは正しいか。あなたの前方を自由浮遊する宇宙船があり、地平線を越える。その後、あなたの視界から消えるだろうか。

練習問題

5. 光の有効ポテンシャル

214 ページにある光の有効ポテンシャルの 2 乗の式 (5.25)

$$(\text{光の有効ポテンシャル})^2 = \frac{1 - \dfrac{2M}{r}}{r^2} \tag{5.25}$$

から始めよう。この関数を r で微分し、有効ポテンシャルが最大値をとる r の値を求めよ。(2 乗された関数は、もとの正の関数が最大値となる値で最大値になる) 有効ポテンシャルの最大値も決めよ。この結果と本文で引用した値を比べよ。**追加：**有効ポテンシャルの 2 乗の 2 階微分を求めよ。1 階微分が 0 となる位置における 2 階微分の符号から、有効ポテンシャルがこの位置で極大値をとることを確かめよ。

6. レーザーパルスを外に向けて発射する

r の値の球殻の指令官がエネルギー E_{shell} のパルスを外に向けて放つ。

A. レーザーパルスが遠くまで到達したとき、レーザーのエネルギーはいくらになっているか。概要としてまとめた以下の質問にしたがうか、または別の方法を使って、この問題に答えよ。(104 ページの (3.28) 式で行った仮定は使わないこと)

遠い観測者が受信したパルスは、半径 r の球殻観測者によって発せられたパルスと比べ赤っぽくなり、振動数が低くなり、量子的エネルギーが小さくなることで特徴づけられる。この重力赤方偏移の大きさは、光子の量子的記述と光の古典的記述 (振動数 f、周期 T をもつ波) を結び付ける式から読みとることができる：

$$\begin{pmatrix}\text{量子化された}\\ \text{光子のエネルギー } E\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{プランク定数}\\ h\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{対応する波の}\\ \text{古典的振動数}\end{pmatrix} \tag{5.46}$$

$$E = hf = h\left(\frac{1}{1\text{ 周期の時間}}\right) = \frac{h}{T} \tag{5.47}$$

T_{shell} を球殻観測者が測定する光の周期と呼び、E_{shell} をそれに対応する光子エネルギーと呼ぶ。そして、それぞれに対応する記号 E と T_{far} をブラックホールから離れた観測者による測定値とする。この本の後ろの公式集の (C) 式を使うと、球殻観測者が測る光の周期 T_{shell} と遠方の観測者が測る光の周期 T_{far} は以下で関係づけられる：

$$T_{\text{shell}} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} T_{\text{far}} \tag{C}$$

これらの式から

$$E = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} E_{\text{shell}} \tag{5.48}$$

が得られる。この式はブラックホール付近で運動するすべてのものに適用できる。104 ページの (3.28) 式は一般的な例の一つである。

B. レーザーパルスを真上にでなく、ある角度で発射する。それでもブラックホールから脱出し、遠くの観測者にたどり着く。A の (5.48) 式は、まだこのパルスのエネルギー E を表しているだろうか。

C. レーザーパルスは外側でなく内側に発射され、地平線を越える。ブラックホールの質量の増加 ΔM はどれくらいになるか。

ノート： この本では光子という言葉を希にしか使わない。光子は奇妙な性質を持った量子物体だからだ。光子を検出することは、所詮、そらしたり壊したりすることであり、そのため深く考えれば、光子の軌跡は観測不可能である。一般相対論は古典論（非量子論）であり、本書では普通古典的な光のビームまたは古典的な光のフラッシュを取り上げている。

7. 一方通行のバリアとしての地平線

光のフラッシュが r_1 の球殻から発せられる。発光する球殻上の観測者が発光時のエネルギーを測ると $E\,(r_1)_{\text{shell}}$ である。さて、フラッシュを内側または外側に向けて発光し換算円周 r_2 の球殻で観測する。

A. r_2 の球殻上の観測者が観測すると、フラッシュのエネルギー $E\,(r_2)_{\text{shell}}$ はいくらになるか。**ヒント：** 無限遠で測ったエネルギーが 一定値 E であると仮定して、(5.48) 式を前後に動かせ。

B. A で求めた式で $r_1 \to 2M$ の極限をとって、地平線から発光したフラッシュが r 座標で地平線から 1 ミリメートル上でさえ検出できないことを示せ。この結果は、どんなものでも、光でさえも、地平線から外へ脱出できないことを表している。それに対して、ニュートンの分析では、速さ c で $r_1 = 2M$ から外側へ運動する粒子は無限の距離にやっとのことで到達し、c 以下の速さで r_1 から発射された粒子は最大半径にまで上り詰め、引き戻される。(光速 c はニュートンの解析では自然な速さの極限ではない) これらのニュートンの分析の予測は正しくない。

C. 今度は、地平線のちょうど上の r_1 から光が内側に発射されると仮定しよう。地平線を越えるとき、このフラッシュのエネルギーの球殻測定値はいくらか。この結果に意味があると思えるか。

8. クエーサーによるエネルギーの発生

ノート：第 4 章の練習問題の結果を使ってこの練習問題を解く。

クエーサー (quasar： quasi-stellar object の略称) は桁外れのエネルギーを吹き出している天体である。あまりに明るいため、最も遠くに見える天体であり、14×10^9 光年にあるものもある。たった一つのクエーサーでも、我々の銀河のすべての星よりも大きなエネルギーを生み出すことができる。ただし、ほとんどのクエーサーはもっと緩やかにエネルギーを発生している。このエネルギー源は何か？ まだわかっていない。ときどきエネルギー放射率が短時間に大きく変わることがあるが、これは発光構造が小さいことを示唆している (伝達速度が光速によって制限を受けるために、構造のいろんな部分が同時に発光率を変えることが妨げられる)。粉々になり螺旋運動してブラックホールに落ちて行く星と、この過程で極端な高温になる物質からエネルギーが発生し、ブラックホールに消える前に膨大な輻射を放出しているという証拠が蓄積している。無限遠から落下した物体のエネルギーがある割合で光に変換されている。

クエーサーのエネルギー生成理論のほとんどは、ブラックホールが速く回転していると仮定している。回転するブラックホールはプロジェクト F「自転するブラックホール」の主題である。ここでは、回転しないブラックホールの周りのエネルギー発生機構のより単純な (そして現実的でない) モデルを分析する。

有効な重力エネルギーの大きさのオーダーを示すため、以下の単純化された衝突を考えよう。ブラックホールの周りの安定軌道のうち最小半径をもつ軌道上を質量 m の石が運動している。同じ質量 m の別の石が最初遠方で静止していたが、ブラックホールめがけてまっすぐ落下し、軌道上の石に衝突した。この 2 つの石の全運動エネルギーが光のエネルギーに変換され、外へと放射され、局所球殻観測者が観測した (球殻観測者に対する運動量保存について考えなくてよい)。

A. 球殻観測者の測る 2 つの石の全運動エネルギーはいくらか。運動エネルギーがすべ

て光のフラッシュに変えられまっすぐ外側に進むと仮定せよ。

B. 遠方観測者が観測する光のフラッシュの全エネルギーはいくらか。

C. 無限遠では全静止エネルギー $m + m = 2m$ のうちどのくらいの割合が光に変換されたことになるか。これと、地球で起きる 0.1 程度の原子核反応のエネルギー変換率と比べよ。

9. 落下者の逝く時刻

あなたはブラックホールからずっと離れたところにいる。灯台があなたから離れて運動している。灯台の自由浮遊系で測って固有周波数 f_0 の光の信号を外に向けて発信しながら、質量 M のブラックホールに静止状態から直接落下する。この灯台があなたから見て「暗闇に消える」または「逝ってしまう」までどれだけ時間がかかるか。

この練習問題はミニプロジェクトである。ここで読むのをやめてもよいし、以下の段落にある質問が意味することを解釈しながら答えてもよい。いくつもの可能な解釈の 1 つにしたがって読み続け、質問に答えることで概略だけを理解するだけでもよい。

遠い観測者にとって、落下する灯台が「暗闇に消える」や「逝ってしまう」というのはどういうことなのか。一つの解釈は、灯台が固有周波数 f_0 の信号を放ちながら落下すると、遠方時計が受信する周波数が $0.9f_0$ から $0.1f_0$ に減るとすることである。我々はこの解釈を採用し、これら二つの周波数の信号が受信される間に遠方時間がどれくらい経っているかを問うことにする。

落ち行く灯台によって発信された信号の固有周波数 f_0 と遠方観測者が受信する信号の周波数 f_{far} の間の関係はどうなるか。2 つのステップでこの質問に答えよ。

(1) 半径 r の球殻観測者によって観測される周波数 f_{shell} と遠方記録係が受信する信号の周波数 f_{far} の関係は何か。

(2) 灯台の固有周波数 f_0 と半径 r の球殻観測者が受信する信号の周波数 f_{shell} の関係はどうなるか。

A. 落ちて行く灯台から球殻観測者が周波数 f_{shell} の信号を受信し、それを遠方の記録係に再発信する（または単にやり過ごす）。そこで受信された周波数は f_{far} となる。f_{shell} と f_{far} の関係はどうなるか。波に関する式 $f = 1/T$ から始めよう。ここで T は波の周期である。巻末の公式集 (C) 式を使って

$$f_{\text{shell}} = \frac{f_{\text{far}}}{\left(1 - \dfrac{2M}{r}\right)^{1/2}} \tag{5.49}$$

を示せ。

通り過ぎていく灯台から発信される固有周波数 f_0 の信号を球殻観測者が受信すると周波数 f_{shell} はいくらになるか。ここで、灯台が通りすぎた直後、しかしまだ実質的に球殻半

径 r にあると考えられるとき、ドップラー効果を考慮に入れなければならない。球殻観測者は見下ろし、特殊相対論にしたがうドップラー効果によって周波数のずれた信号を受信する（テイラーとホイーラー、*Spacetime Physics,* 114 ページ）：

$$f_{\text{shell}} = \left(\frac{1 - v_{\text{shell}}}{1 + v_{\text{shell}}}\right)^{1/2} f_0 \tag{5.50}$$

灯台が球殻観測者を通り過ぎるとき、どれだけ速く運動しているかまだ決めていない。灯台はブラックホールから遠く離れたところで静止状態から落下したと仮定する。球殻観測者によって測られる速さの 2 乗は 102 ページの (3.25) 式から得られる：

$$v_{\text{shell}}^2 = \frac{2M}{r} \tag{5.51}$$

B. (5.51) 式を (5.49) 式に代入し、(5.50) 式から f_{shell} を消去せよ。仮定した条件に対して

$$\frac{f_{\text{far}}}{f_0} = 1 - |v_{\text{shell}}| = 1 - \left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2} \tag{5.52}$$

を示せ。

C. 灯台が放った信号の周波数を遠い観測者が受信したとし、$f_{\text{far}} = 0.9 f_0$ となる半径 r_1 を求めよ。我々の答えは $r_1 = 200M$ である。この答えは正しいか。正しくなければ、正しい答えを有効数字 3 桁で求めよ。

D. 灯台が放つ信号の周波数が遠くの観測者によって受信されたとき、$f_{\text{far}} = 0.1 f_0$ となる観測者の半径 r_2 を求めよ。我々の答えでは、r_2 は $2M$ よりも少し大きな値である。有効数字 3 桁で答えよ。

これまでで、遠方観測者が測定したとき、周波数が $0.9 f_0$ と $0.1 f_0$ になる半径 r_1 と r_2 がわかった。次に、遠方の観測者がこれら 2 つの信号を受信する間に待たなければならない時刻を決める必要がある。これが灯台の「逝く時間」である。逝く時間は 2 つの部分からなっている。(1) 灯台が r_1 から r_2 に落下するまでの遠方時間 (2) 光が r_2 から r_1 まで上るのにかかる遠方時間。注意：外側の半径 r_1 から遠方観測者の位置まで光が上がっていくのにかかる時間を考慮に入れる必要はない。この時間がどうであれ、r_1 から放たれた最初のフラッシュが遠方に届くまでの時間と半径 r_2 で発せられた 2 番目のフラッシュが途中にある r_1 から遠方に届くまでの時間は同じである。知りたいのは、2 つのフラッシュが遠方観測者に到達したときの時間差である。

E. 遠方の観測者が測るとき、灯台が r_1 から r_2 に落下するのにかかる時間を求めよ。100 ページの (3.22) 式

$$\frac{dr}{dt} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2} \tag{5.53}$$

から始めよ。遠方における経過時間を求めるために dt で積分することは容易ではない。好きなやり方で計算すればよい。我々は $z = r/(2M)$ と置き、$u^2 = z$ として

$$dt = \frac{4Mu^4 du}{1-u^2} \tag{5.54}$$

を得る。不定積分の公式表には

$$\int \frac{u^4 du}{1-u^2} = -\frac{u^3}{3} - u + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right| \tag{5.55}$$

がある。この解析から、灯台が r_1 から r_2 まで落下する時間の式を求めよ。我々の結果は有効数字 2 桁で $1400M$ である。少なくとも有効数字 3 桁で結果を求めよ。

F. r_2 の灯台から放たれた光が r_1 に上がるまでに必要とする遠方時間の値を求めよ。205 ページの (5.3) 式の正の解から始めよ：

$$\frac{dr}{dt} = 1 - \frac{2M}{r} \tag{5.56}$$

この積分は簡単にできるが、まだ積分表の助けが必要だ。我々の結果では、光が r_2 から r_1 に上がる時間は有効数字 1 桁で $200M$ である。有効数字 3 桁で答えよ。

G. $0.9f_0$ に偏移した信号の遠方到達時間と $0.1f_0$ に偏移した信号の遠方到達時間の差 Δt_{far} を求めよ。

H. 灯台が太陽質量の 10 倍のブラックホールに落ちて逝く時間 Δt_{far} を求めよ。秒の単位で表せ。

10. ブラックホールの温度

A. (5.43) 式を使って、太陽質量の 5 倍のブラックホールを遠くから見たときの温度を求めよ。

B. 遠方から見たとき、温度が 1800K（鉄の融点）となるブラックホールの質量はいくらか。答えを地球の質量の何倍かで答えよ。

プロジェクト D

アインシュタインリング

- 光は太陽の近くを通り過ぎるとなぜ向きを変えるのか。
- アインシュタインリングはなぜできるのか。どうやったら見えるのか。
- どうすれば我々の銀河の暗い天体を観測できるか。
- どうしたらこの本の表紙の奇妙に曲がった像を説明できるか。

アインシュタインが私と議論していた、その時、突然説明を中断し、窓辺に置いてあった電信を私に「これは君にとっても面白いかもしれない」の言葉とともに手渡してくれた。それはまさにエディントンからの手紙だった。日食の観測を続け、太陽の近くを通る光線が曲がることを確かめたという知らせだ。「なんてすばらしいことなんだ。ほとんど計算した通りではないか」と私は心の底から思わず叫んだ。彼は全く動じなかった「理論が正しいことはわかっていた。君は疑ってたのかい」「もちろん、疑うもんか。でも、もしこうして確かめられなかったら、君は何って言っていたんだろう」と私が言ったとき、彼は「それは残念だろうなあ。でも理論は正しいんだ」と答えた。

— ローゼンタル=シュナイダー (Ilse Rosenthal-Schneider)

D.1 「君は疑ってたのかい」

1919 年にエディントン (Arthur Eddington) が太陽の近くを通る星の光の湾曲を実証したことを聞いて、アインシュタインはすぐ喜んだ。このプロジェクトでは、アインシュタインの予言 (彼による方法ではないが) を再度行い、現代天文学的観測技術に適用してみる。アインシュタインの結果はほとんど球形の天体によって星の光が曲げられるときや、光がシュワルツシルトブラックホールの遠く ($r \gg 2M$) を通り過ぎるときに正しく使える。これは**弱い重力場近似**と呼ばれている。D.7 節では弱い重力場近似を使って、227 ページの図 14 に示したような**アインシュタインリング**を説明する。レンズのような集光作用によって、遠い星からの光の量を増やすことができる。この効果は**マイクロレン**

ズ効果と呼ばれ、それを D.8 節で述べる。D.9 節ではアインシュタインリングを使ってこの本の表紙の土星の像の性質を説明する。

ブラックホールの近くを通り過ぎる光には弱い重力場近似が適用できず、光は半径方向に曲げられ、一時的な軌道上を進んでいくことさえある（第 5 章）。このような半径方向の湾曲は、表紙の上の図の中心にある「ダイヤモンドネックレス」を説明する。これは D.10 節で述べる（より激しい光の振舞いについては、プロジェクト F の「自転するブラックホール」を見よ）。

D.2 ニュートン的な光の湾曲

一般相対論で調べる前に、光が重力場中で下方に加速されるという仮定のもとで（図 1）、光の湾曲について近似的なニュートンの予測から始めよう。我々が使う近似は（1）光は太陽の直径を通り過ぎる間にだけ曲げられ（2）湾曲する間、加速度は光の運動に対して垂直で、太陽表面での加速度の大きさに等しい、の 2 つである。

質問 1 太陽の表面での重力加速度。 巻末公式一覧の物理定数を使って、ニュートン力学にしたがい太陽表面の重力加速度を計算せよ。通常の単位メートル/秒 ^{2} を使え。

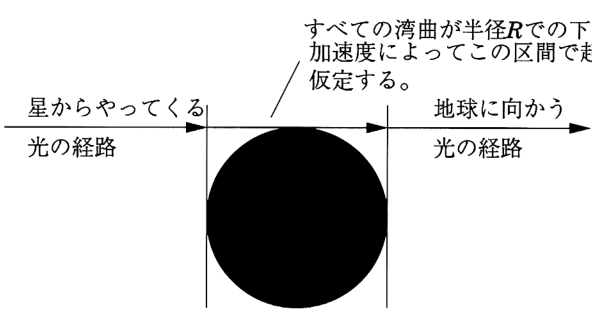


図 D.1 太陽による光の湾曲のニュートン的分析。物質粒子とともに光が重力加速度を受けると仮定せよ。ニュートンにしたがうと、横の速度の変化は光が太陽の直径を通り過ぎる間に作用する加速度を使って計算される。湾曲は 2 秒角以下しかなく、あまりに小さいため、この図では見えず、湾曲を強調した後の図でも見えない。したがって次の図（図 2）では強調している。

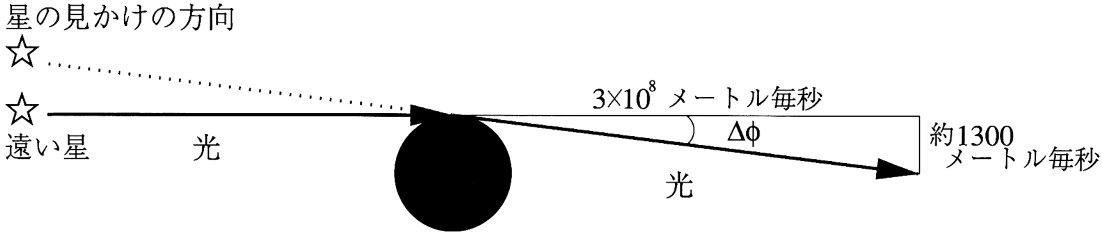


図 **D.2** 図 **1** で概略として説明したニュートン的な分析における光の湾曲の（大いに強調された）説明図。

質問 2 光が太陽を横切る時間。光が太陽の直径と等しい距離を運動するのにかかる時間を秒の単位で計算せよ。

質問 3 光の「太陽に向かう」運動の変化。光が太陽をかすめる時間を質問 2 で計算した。その時間内に、経路に垂直な一定の加速度を受けるとする（しかも経路に沿った方向にはどこでも加速度を受けないとする)。その加速度は質問 1 で計算した。そのとき、光はほぼ 1300 メートル毎秒の太陽に向かう速度成分を持つことになる。図 2 を見よ。有効数字 4 桁で結果を求めよ。

質問 4 湾曲の「ニュートン」角。図 2 に示したように、$\Delta\phi$ をラジアン単位の光の湾曲の角度とする。湾曲は小さい角度でしか起きないため、$\tan(\Delta\phi)\approx\Delta\phi$ と仮定する。これまでの結果から、この湾曲は近似値として $\Delta\phi\approx 4\times10^{-6}$ ラジアンである。有効数字 3 桁で求めよ。

質問 5 秒角。太陽による星の光の湾曲はふつう秒角の単位で表される。1 度は 60 分角であり、1 分角は 60 秒角である。ニュートンの分析にしたがうと、太陽による光の湾曲 $\Delta\phi$ はほぼ 1 秒角である。有効数字 3 桁で求めよ。

ニュートンの結果（これからみるように、これは 2 倍小さい）から、湾曲が非常に小さいという暫定的な結論を下す。この仮定はこれからの一般相対論的導出で重要となり、一般相対論的導出の結果についても再度検討しなければならない。

D.3 一般相対論的解析の準備

それでは光の湾曲を一般相対論的に予測しよう。光のパルスが太陽に近づき通過し、そして遠ざかる。その位置は方位角 ϕ によって追跡できる（図 3)。湾曲が起きなければ、パルスは遠くから近づき、遠くへ去り、角度 ϕ は π ラジアン動く。我々が求めたいのは、重力的な湾曲によって引き起こされる付加的な角度 $\Delta\phi$ である（図 4)。

追跡角度 ϕ は半径の小さな変化 dr に対してどれだけ変化するのだろうか（図 3)。答えは、210 ページの (5.14) 式と (5.15) 式から得られる $d\phi/dr$ の中にある：

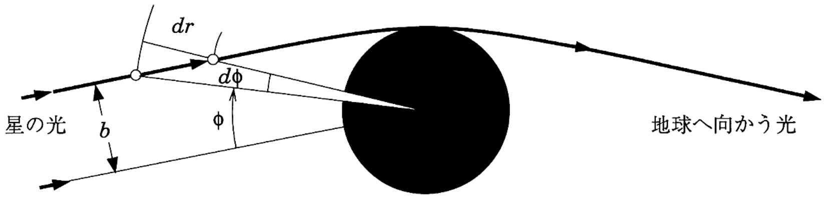


図 **D.3** 図光のパルスが半径 dr 変化したときの方位角 ϕ の変化 $d\phi$ の測定。湾曲は大きく強調してある。湾曲がなければ、r が遠方の星から R に近づき遠くにある地球まで行くと、角度 ϕ は π になる。実際の湾曲を予言するためには dr と $d\phi$ の関係が必要である。**(D.4)** 式はこの関係を与える。距離 b は衝突パラメータである。

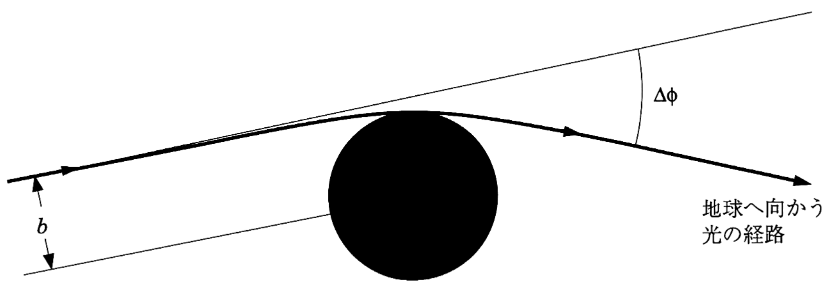


図 **D.4** 太陽の重力によって曲げられる星の角度 $\Delta\phi$。大きく強調してある。

$$\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = \frac{b^2}{r^4}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^2 \tag{D.1}$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(1-\frac{2M}{r}\right)^2 - \left(1-\frac{2M}{r}\right)^3\frac{b^2}{r^2} \tag{D.2}$$

ここで b は衝突パラメータである (208 ページの図 2 で定義した)。

質問 6 角度 ϕ は r が変わるにつれて変化する。(D.1) 式を (D.2) 式で割り、整理すると

$$\left(\frac{d\phi}{dr}\right)^2 = \frac{b^2/r^4}{1-\left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{b^2}{r^2}} \tag{D.3}$$

となることを示せ。これを書き直すと

$$d\phi = \frac{dr}{r^2\left[\frac{1}{b^2}-\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)\right]^{1/2}} \tag{D.4}$$

となることを示せ。

後は、原理的に (D.4) 式を $r=\infty$ から最も近づく半径 $r=R$ まで積分するだけである。遠ざかることも考慮に入れると、全湾曲はこの積分の結果の 2 倍になる。$M\to 0$ のとき（中心に質量がないとき）結果は $\phi=\pi$ ラジアンである。しかし質量 M があると、結果は π よりも少しだけ小さくなる。この「少しだけ」、つまり図 4 の $\Delta\phi$ が我々が求めようとしているものであり、この値は 10^{-5} ラジアンになると予想される。

(D.4) 式の右辺は積分公式表には見当たらないので、これから示す近似を使って積分できるように置換する。

質問 7 **積分の準備。** まず置換 $u=R/r$ をせよ（ニュートン力学の場合でさえも標準的置換になる）。そして、$dr=-r^2du/R$ とせよ。右辺を $r=R$ から $r=\infty$ まで（$u=1$ から $u=0$ まで）積分することになるだろう。少し整理すると (D.4) 式が

$$d\phi = \frac{-du}{\left[\frac{R^2}{b^2}-u^2+2\frac{M}{R}u^3\right]^{1/2}} \tag{D.5}$$

となることを示せ。

積分する前に、一つだけ気をつけなければならないことがある。衝突パラメータ b が M と R の関数であるということだ。それはどういうことか？ それは b の値が任意にとれないためで、b は光が太陽の表面をかすめるように選ばなければならない（図 3 と図 4)。b と R, M の間の関係はどうなっているのか。214 ページの (5.24) 式に戻ろう：

$$\frac{1}{b^2}\left(\frac{dr_{\text{shell}}}{dt_{\text{shell}}}\right)^2 = \frac{1}{b^2}-\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right) \tag{D.6}$$

光が太陽表面をかすめるときには接線方向に運動するが、$r=R$ では半径方向には運動したいため、(D.6) 式の左辺は 0 になる（最も中心に近づくため、$r_{\min}$ は最小値になる)。

質問 8 衝突パラメータ b を消去。$r = R$ を (D.6) 式に代入し、左辺を 0 に等しいとせよ。その結果を整理して

$$\frac{R^2}{b^2} = 1 - \frac{2M}{R} \tag{D.7}$$

となることを示せ。

(D.7) 式を (D.5) 式に代入すると

$$d\phi = \frac{-du}{\left[1 - u^2 - \frac{2M}{R}(1-u^3)\right]^{1/2}} = \frac{-(1-u^2)^{-1/2}du}{\left[1 - \frac{2M}{R}\frac{(1-u^3)}{(1-u^2)}\right]^{1/2}} \tag{D.8}$$

となる。

D.4 近似

ここまでは近似をしていない。ここで M/R が極端に小さいことに気をつける。太陽質量 M は 1477 メートルであり、太陽の半径 R は約 7×10^8 メートルである。したがって $M/R \approx 2 \times 10^{-6}$ である。これは小さい値なので、標準的な近似

$$(1+d)^n \approx 1 + nd \qquad |d| \ll 1 \text{ かつ } |nd| \ll 1 \text{ のとき} \tag{D.9}$$

を安心して使うことができる。この式を (D.8) 式に使うと、(D.9) 式の d は (D.8) 式の右辺の分母にある平方根の中の第二項に対応する。

質問 9 小さい M/R の近似。(D.9) 式を (D.8) 式に使うと

$$\begin{aligned} d\phi &= -(1-u^2)^{-1/2}\left[1 + \frac{M}{R}\frac{(1-u^3)}{(1-u^2)}\right]du \\ &= \frac{-du}{(1-u^2)^{1/2}} - \frac{M}{R}\frac{du}{(1-u^2)^{3/2}} + \frac{M}{R}\frac{u^3du}{(1-u^2)^{3/2}} \end{aligned} \tag{D.10}$$

となることを示せ。

D.5 一般相対論の結果

これでやっと積分ができる。$r = R$ から $r = \infty$ まで、または $u \equiv R/r = 1$ から $u = 0$ まで積分する。いずれの場合も図 3 と図 4 の軌跡の両「足」について積分するために結果を 2 倍する。積分表から、(D.10) 式の右辺の第一の積分は（2 倍すると）、太陽が存在

しないときの角度の変化を表す：

$$\int_1^0 \frac{-2du}{(1-u^2)^{1/2}} = [-2\arcsin u]\Big|_1^0 = 2\arcsin 1 = 2\frac{\pi}{2} = \pi \qquad \text{(D.11)}$$

我々が知りたいのは、湾曲しないときの π の角度に加え、湾曲 $\Delta\phi$ による付加的な角度である。図 3 と図 4 を参照して

$$\phi_{\text{total}} = \pi + \Delta\phi \qquad \text{(D.12)}$$

とする。$\Delta\phi$ の値は (D.10) 式の第 2 項と第 3 項の積分の結果である（もう一度 2 倍する)。積分表を使い、2 つの積分を求めよ。

$$\begin{aligned}
\Delta\phi &= -\frac{2M}{R}\left[\int_1^0 \frac{du}{(1-u^2)^{3/2}} - \int_1^0 \frac{u^3 du}{(1-u^2)^{3/2}}\right] \\
&= -\frac{2M}{R}\left[\frac{u}{(1-u^2)^{1/2}} - (1-u^2)^{1/2} - \frac{1}{(1-u^2)^{1/2}}\right]\Bigg|_1^0 \\
&= -\frac{2M}{R}\left[\frac{u-1}{(1-u^2)^{1/2}} - (1-u^2)^{1/2}\right]\Bigg|_1^0 \\
&= \frac{4M}{R} \qquad \text{(D.13)}
\end{aligned}$$

この結果は積分の上限 $u=0$ からくる。積分の下限には問題がわずかながらある。第一項の分母 $(1-u^2)^{1/2}$ は下限 $u=1$ で 0 になる。しかし第一項は

$$\frac{u-1}{(1-u^2)^{1/2}} = -\frac{1-u}{(1-u)^{1/2}(1+u)^{1/2}} = -\left(\frac{1-u}{1+u}\right)^{1/2} \qquad \text{(D.14)}$$

と書くことができ、 u が 1 になると 0 になる。したがって (D.13) 式の下限はこの結果により 0 になる。上限から $4M/R$ になり、それは太陽による星の光の湾曲（ラジアン単位）になる。すべての計算結果は簡単で小さな式

$$\Delta\phi \approx \frac{4M}{R} \quad \text{弱い重力場近似} \qquad \text{(D.15)}$$

になる。**注意：**質問 1 から 4 のニュートン的な分析だけを行えば、正確に (D.15) 式の半分の値になる。

質問 10　星の光の湾曲（ラジアン）。M と R に太陽の値を代入し、湾曲の値 $\Delta\phi$ をラジアンで計算せよ。
質問 11　星の光の湾曲（秒）。質問 10 の答えを秒角の単位に変換せよ。答えは有効数字 1 桁で 2 秒角である。有効数字 3 桁まで答えよ。

質問 11 の答えは一般相対論の予言である。近似を使っているけれども、太陽に対してはよい近似である。(D.15) 式は、展開の第一項であり、その次には $(M/R)^2$ の項が続く。

第二項は (D.15) 式の右辺の約 2×10^{-6} 倍でしか影響しない。角度の補正の予測が観測の精度よりもずっと小さいため、微小な光の湾曲は無視できる。

ブラックホール以外のほとんどの球形の天体に対して、最も近づく距離 R は距離で表した天体の質量よりもかなり大きい。天体の近くを通る光を調べるために、この節の弱い重力場近似式 (D.15) を適用することは正当化できる。ブラックホールの近くを通り過ぎる光の運動は第 5 章とこのプロジェクトの D.10 節で調べる。

質問 12 中性子星による光の湾曲。中性子星の表面をかすめる光はどのくらい大きく曲げられるのか。中性子星は太陽の 1.4 倍の質量をもち、半径が 10 キロメートルであり、自転していないと仮定せよ。(D.15) 式にしたがって、その表面を接線方向に通り過ぎる光の曲がりはいくらか。結果を度の単位で表せ。この結果は信用できるか。つまりこの場合、(D.15) 式を得るために使った近似の条件は満たされているか。

D.6 観測との比較

太陽による光の湾曲の予測 (D.15) は観測によってどの程度確かめられているのだろうか。表 D.1 に可視光の測定を示した。**注意：** 日食のときに観測された星は太陽の周りのいろんな位置に見えている。4 列目の数値は光が太陽の表面をちょうどかすめたとしたときの湾曲に計算し直したものである。

さらに信頼性のある正確な結果は電波天文学によるものである。可視光の代わりに電波を使う。毎年 10 月になると地球から見て太陽は 3C279 というクエーサーの像を横切

表 D.1 太陽による星の光のずれ。いろんな日食から推論された値

日食の日	場所	星の数	湾曲 (秒角)	参照論文 (プロジェクトの最後)
1919 年 5 月 20 日	ブラジルのソブラル	7	1.98 ± 0.16	a
	ギニア湾プリンシペ島	5	1.61 ± 0.40	
1922 年 9 月 1 日	オーストラリア	11–14	1.77 ± 0.40	b
	オーストラリア	18	1.42 から 2.16	c
	オーストラリア	62–85	1.72 ± 0.15	d
	オーストラリア	145	1.82 ± 0.20	e
1929 年 5 月 9 日	スマトラ	17–18	2.24 ± 0.10	f
1936 年 6 月 19 日	旧ソ連	16–29	2.73 ± 0.31	g
	日本	4-7	1.28 から 2.27	h
1947 年 5 月 20 日	ブラジル	51	2.01 ± 0.27	i
1952 年 2 月 25 日	スーダン	9–11	1.70 ± 0.10	j

る。電波天文学者はこの**掩蔽**を使って、光源が太陽に近づき端を横切り隠れるときの信号の角度変化を測定することができる。この角度変化は、光が湾曲しない別のクエーサー 3C273 からの信号と比較することで測られる。3C273 は地球から見て太陽から約 10 度離れている。角度の正確性は皿型のアンテナを広く並べた**超長基線電波干渉計**（Very Long Baseline Interferometer; VLBI）と呼ばれる実験技術を使って測定することができる。リーバック（D. E. Lebach）と共同研究者は 1 つの皿状アンテナを使って最近観測を行った。実際には 1 組のアンテナで、カルフォルニアのビッグパインとマサチューセッツのウエストフォードにある。観測結果は、一般相対論の予測する重力的な湾曲の 0.9996 ± 0.0008 倍である。この結果は 1.00000 を跨いでおり、理論と実験の一致は完全であろう。このプロジェクトの後の論文を見よ。

D.7 アインシュタインリングの計算

これまでに観測されたアインシュタインリングのうち、最初のものを 227 ページの図 14 に示した。我々がアインシュタインリングを見るのは、遠い光源からの光が途中の重力源天体のあらゆる縁を通って曲げられてくるときである（図 5)。アインシュタインリングは、光源と途中の天体、観測者が一直線上にあるときに見える。

これまでの節の結果から点源によるアインシュタインリングの直径の角度を予測するこ

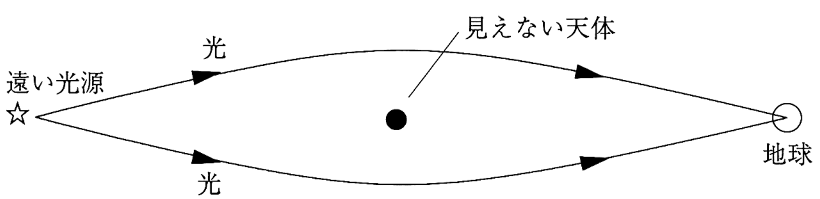


図 D.5 アインシュタインリングの形成図。スケールは合っていない。途中の物体は遠い星と地球の間のちょうど真中にある必要はない。

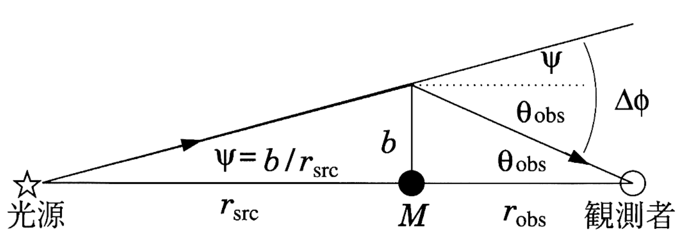


図 D.6 観測者の目で見たアインシュタインリングの観測角度 θ_{obs} の導出の図。スケールは合っていない。この図で r_{src} と r_{obs} を定義している。

とができる。図6に幾何学的な構成図を示した。太陽による湾曲を計算するために、太陽の半径 R を使いたい。(D.7) 式から衝突パラメータ b を消去できる。だが遠方の星からアインシュタインリングを形成して目に入ってくる光は途中の暗い天体の表面をかすめる光ではないかも知れない。しかし、(D.7) 式では、$r \gg 2M$ に対して単に $R \approx b$ とすることを述べているだけである。そうすると、(D.15) 式は

$$\Delta\phi \approx \frac{4M}{b} \tag{D.16}$$

となる。近似を追加し図 6 を調べる。多少なりとも完全なリストを以下に示す。これらの近似は一般的に、途中の天体から光源の距離と観測者の距離が、途中の天体から湾曲が起きるところまでの距離に比べて文字通り天文学的であるという事実によって正当化される。

1. $r_{\text{src}} \gg 2M$ と $r_{\text{obs}} \gg 2M$, $r_{\text{src}} \gg b$, $r_{\text{obs}} \gg b$ を仮定せよ。
2. ユークリッド幾何学を使え。
3. 湾曲は途中の物体付近の一点で起きると仮定せよ。この仮定はよいであろう。M から光源の距離と M から観測者までの距離は文字通り天文学的であり、湾曲が起きる軌道までの距離に比べて大きいからである。
4. 衝突パラメータ b はふつう入射光線に垂直に測られるのだが、ここでは図 6 に示したように鉛直に測定せよ。
5. 小さい角度では、 sin と tan はラジアンの角度で近似できる ($\theta \ll 1$ に対して $\sin\theta \approx \tan\theta \approx \theta$) となる。

近似 1 から 5 を 225 ページの (5.38) 式に適用せよ。この式では、角度 θ_{shell} は外向きの半径方向から測定されている。図 6 の角度 θ は内向きの半径方向を基準に定義されているのだが、sin の値はどちらも同じである（223 ページの例題 3 の注意を思い出せ)。「観測角度」を θ_{obs} と呼び、中間にある物体までの距離を r_{obs} と呼ぶ。よって、図 6 から

$$\theta_{\text{obs}} = \frac{b}{r_{\text{obs}}} \tag{D.17}$$

である。「光源」に対して添字 “src” を使い、図 6 の右上の角度の間の関係を書き下すと

$$\Delta\phi = \psi + \theta_{\text{obs}} = \frac{b}{r_{\text{src}}} + \theta_{\text{obs}} \tag{D.18}$$

となる。

質問 13　アインシュタインリング角。(D.16) 式を (D.18) 式に代入し、(D.17) 式を使って b を消去せよ。その結果が

$$\theta_{\rm obs} = \theta_{\rm Ein} = \left[\frac{4Mr_{\rm src}}{r_{\rm obs}(r_{\rm obs}+r_{\rm src})}\right]^{1/2} \tag{D.19}$$

であることを示せ。添字 "Ein" はアインシュタインリングを表す。

D.8　マイクロレンズ効果

回転する銀河の中に見える星の質量だけでは、銀河そのものの形を維持することができない。もしそれだけしかなければ、これらの星は回転している間に飛んで行ってしまうだろう。しかし実際にはそうなってはいない。あれやこれやといった証拠から、銀河中に見える星を数えて得られる質量よりも銀河にはずっと大きな質量があることがわかっている。この何だかよくわからない仮定上のものには**ダークマター**という名がつけられている。個々のダークマター天体にはおかしな名前 **MAssive Compact Halo Objects** が付けられており、これは略して **MACHOs**（マッチョ）と呼ばれ、どうやら銀河を取り囲むハローの中でひしめいているようだ。

どうやったら我々の銀河中にあるこのダークマターを見つけることができるのだろうか。1986 年パチンスキー（Bohdan Paczynski）は、長い間理論上のことだとして見向きもされなかった方法を具体的な手段として提案した。その方法では暗い物体による星の湾曲を用いている。暗い物体と地球、遠くに見える星が一直線上に並ぶとき、暗い物体は、それがなければ地球から見えないような暗い光を集める（図 5）。その結果、装置がアインシュタインリングの構造を分解できないような遠い星からの光の強度は増加する。集まった光が増加することを**マイクロレンズ効果**と呼ぶ。我々の銀河には光が弱すぎて観測することができない天体がたくさんがあるが、マイクロレンズ効果を使えば研究できる。パチンスキーの提案は観測の新しい分野を開き、すでに多くのマイクロレンズ効果による事象が見つかっている。

マイクロレンズ効果の困難は、200 万程度の星々の内で 1 個しか像を結ばないことである。したがって、パチンスキーは、マイクロレンズ効果が希な事象であり、たくさんの星を同時に監視する必要があることを予測した。

マイクロレンズ効果を観測するための最善の機会を増やすために、背景として星を多く含む天体が必要である。見える星の内の 1 つ 1 つが、暗い天体の背後にある機会が増えるのだ。地球の観測者には、星が豊富な背景の天体がいくつも見える。それは我々の銀河中心にあるバルジといわゆるマゼラン雲である。マゼラン雲は南半球で見える我々の天の川銀河に付随する 2 つの衛星銀河である（マゼランという名はマゼラン（Ferdinand

Magellan）の最初地球一周旅行（1519–1522）の間にこれらの星雲が観測されたことに因んでいる）。

マイクロレンズ事象が起きると、遠い星から地球に届いた光の量が数日または数週間の期間で増加し、そして減少し消えていく。ピークではその星からの光のフラックスが通常の数倍になることもある。

マイクロレンズ効果のアイディアは新しすぎるので、その技術の発展は日進月歩である。まだ初歩的な結果であるが、マイクロレンズ効果によって観測されたダークマターでは我々の銀河の質量の不足分を説明できない。見える星の質量では星が飛び去っていくのを止めることはできないのだ。詳しくはこのプロジェクトの最後の参照論文を見よ。

質問 14 マイクロレンズ効果による事象の同定。 議論する問題：マイクロレンズ効果による星の増光と星の内部構造による光のフラックスの増加をどのようにして区別すればよいのか。以下の質問はこの問題に答えるのに役立つであろう。

マイクロレンズ効果による増光は、星の光のスペクトルの色すべてに対して同じように起きるか。自然な増光が大きな燃焼率によるものであり、星が高温であるとしよう。この過程によって星からの光のスペクトルが変わると思うか。

マイクロレンズ効果による事象は同じ星で 1 回以上起きると思うか。内部過程による星の増光は同じ星で 1 回以上起きると思うか。

マイクロレンズ効果による事象の時間変化の形、つまり光の強度と時間の曲線は天文学者に予想できるか。この時間変化の形は星の内部過程による増光と同じになりそうか。

D.9 アインシュタインドーナッツ

この本の表紙のイメージは、ブラックホールの重力効果による背景天体の形状が視覚的に変化していることを表している。

表紙の下の写真はハッブル宇宙望遠鏡の赤外線カメラで土星を撮影したものであり、歪んではいない。よく見かけるこの土星の写真の左下に点があることに気づいただろうか。これは土星の衛星のディオネである。別の衛星 テテュスが土星の円盤の右上の端にある（これらの 2 つの衛星を見つけやすいように明るくした）。

我々と土星を結ぶ視線上にブラックホールの中心を置き、我々観測者がブラックホールから半径方向の距離（換算円周）$r = r_{\mathrm{obs}} = 10M$ にいるようにする。土星とブラックホール、観望者がすべて相対的に静止しているとし、ブラックホールによって引き起こされる時空の曲率により土星（や我々）の構造が変化しないと仮定する。すると表紙の上のイメージの結果になる。これは何だ。

第一に、土星それ自身が歪められ、ドーナッツ（トーラス）になっている。名付けて、**アインシュタインドーナッツ**だ。ドーナッツの形は光源が点ではなく、円盤に見えるとき

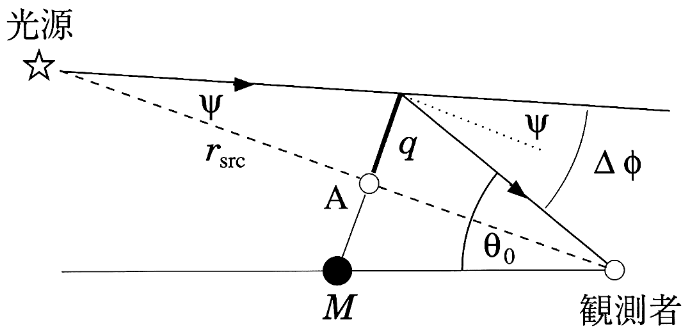


図 **D.7** 観測者と湾曲質量を通る軸から外れた光源に対して観測者角 $\theta_{\mathbf{obs}}$ (**(D.21)** 式) を導出するための構成図 (スケールは正しくない)。角度 θ_0 は湾曲質量 M がないときの観測角である。長さ q と角度 ψ は **(D.20)** 式の導出に使われる。見やすくするために、省略した記号もある。例えば、観測者から **A** 点までの距離は (よい近似として) 観測者半径 $r_{\mathbf{obs}}$ である。右上の記号 ψ の下の示していない小さい角度は $\theta_{\mathbf{obs}}-\theta_0$ である。

にできる。以下では、アインシュタインリングの (D.19) 式の一般形を使って、ドーナッツの主な特徴を調べることにする。しかし、この結果から数値を正しく計算することはできない。なぜなら表紙のイメージを作るために観測者を $r_{\text{obs}}=10M$ に置いているのだが、その導出は $r_{\text{obs}}\gg 2M$ の仮定に依存しているからだ。表紙の上のイメージはかなり遠い距離の観測者が見るものよりもずっと劇的である。

第二に、歪んだ土星の輪が複製イメージとなって見えている。一つのイメージはドーナッツの外側表面の上部にあり、もう一つのイメージは左右上下逆で、ドーナッツの下の内側に存在している。

第三に、重力的湾曲は土星の衛星であるディオネの像を汚し、右上のアインシュタインドーナッツのちょうど内側に第二の暗いイメージを作る。

第四に、円形の点の「ダイヤモンドネックレス」がアインシュタインドーナッツの内側に薄暗く見える。

質問 15 ドーナッツ側。表紙の上下のイメージは同じスケールになっている。上のイメージのドーナッツの平均直径がなぜ下のイメージに示した土星の直径よりも大きくなるかを一行で書いて説明せよ。

図 7 は、図 6 を観測者とブラックホールを通る軸から光源が離れている場合に一般化したものである。ここで θ_0 は途中の質量を取り除いたときに点源が見えると思われる角度である。

図 7 とその説明文を使って (D.19) 式を導出したが、この場合にも同様に行うことができる。この導出は 252 ページの 5 つの仮定すべてに関係している。この場合は少し複雑

である。したがって導出しても導出しなくてもよい。結果は

$$\theta_{\rm obs} = \theta_0 + \frac{4Mr_{\rm src}}{\theta_{\rm obs} r_{\rm obs}(r_{\rm obs} + r_{\rm src})} = \theta_0 + \frac{\theta_{\rm Ein}^2}{\theta_{\rm obs}} \tag{D.20}$$

となる。ここで、アインシュタインリング角 $\theta_{\rm Ein}$ （(D.19) 式によって与えられる）は、光源と湾曲質量、観測者すべてが一直線に並ぶ特別な場合の観測角である。

質問 16　軸から離れた観測角。 (D.20) 式は 2 次方程式である。その解が

$$\theta_{\rm obs} = \frac{\theta_0 \pm (\theta_0^2 + 4\theta_{\rm Ein}^2)^{1/2}}{2} \tag{D.21}$$

であることを示せ。$\theta_0 = 0$ のとき、$\theta_{\rm obs}$ の値はいくらか。$\theta_0 = 0$ の物理的な意味は何か。$\theta_0 = 0$ のときに、式の前にあるプラスとマイナスの物理的な意味は何か。

質問 17　軸から離れた光源：第一の例。 特別な場合 $\theta_0 = \theta_{01} = 5^{1/2}\theta_{\rm Ein}$ を考えよ。(D.21) 式を使って、2 解 $\theta_{\rm obs1}$ を求めよ。なぜ一方の解は負なのか。この負の解は物理的に何を意味するのか。

質問 18　軸から離れた光源：第二の例。 2 番目の曲がらない角度 $\theta_{02} = 12^{1/2}\theta_{\rm Ein}$ に対して、2 解 $\theta_{\rm obs2}$ を求めよ。質問 17 で求めた答えと比べよ。$\theta_{\rm obs2}$ は $\theta_{\rm obs1}$ よりも大きいか小さいか。

(D.21) 式からは表紙の上図にあるドーナッツ構造を数値的に正しく予測できないことを頭の隅においておく必要がある。なぜなら $r_{\rm obs} = 10M$ は、(D.21) 式を導くために行った仮定 $r_{\rm obs} \gg 2M$ を壊しているからだ。しかし、質問 16 から質問 18 の結果を使って調べるときに表紙の上図の定性的な特徴は意味をもつ（上図の中心を取り巻く「ダイヤモンドネックレス」はブラックホール近くで光がずっと大きく湾曲することによる結果であり、(D.21) 式では全く求めることができない。D.10 節でダイヤモンドネックレスを考察する）。

質問 19　表紙のアインシュタインドーナッツの特徴。 図 8 の点 A, B, C について触れよう。図 8 は土星とリング、遠方の観測者を上から眺めた様子を表している。点 A, B, C に対して、角度 $\theta_{\rm obs}$ は 2 つの値を持つだろう。これらの値を調べるときには、図 8 に示したように、観測者が向かって「左」に見える角度と「右」に見える角度を区別しよう。質問 16 から質問 18 で求めた答えを使って、以下の質問に定性的に答えよ。

1. 「左」を見て、点 A, B, C の各々について $\theta_{\rm obs}$ の大きさは湾曲質量 M がないときの観測角 θ_0 よりも大きいか小さいか。
2. 「右」を見て、点 A, B, C の各々について $\theta_{\rm obs}$ の大きさは θ_0 よりも大きいか小さいか。
3. 左から右に目を移すと、土星の中心から「左」に見える点 A, B, C の順序はどうなるか。
4. 左から右に目を移すと、土星の中心から「右」に見える点 A, B, C の順序はどうなるか。

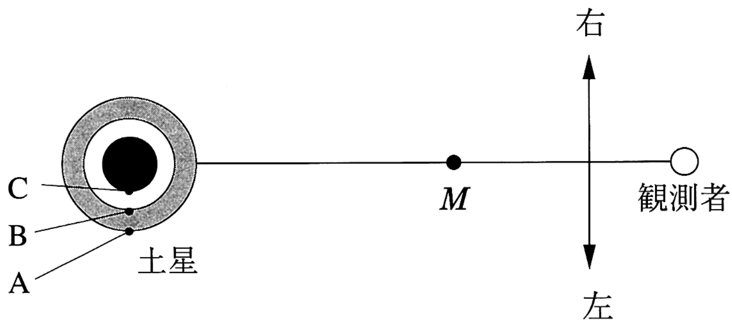


図 D.8 表紙の下のイメージに示された土星を上から見下ろしたかのような眺め。スケールは合っていない。質問 19 では、ブラックホール M を正しく置いたとき、観測者が点 **A, B, C** を正面に見た角度について尋ねている。

> **質問 20 表紙の説明。** 表紙の 2 つのイメージについて素人の目から見た説明文を書け。変換や湾曲の背後にある物理を説明しようとしてはいけない。その代わり、下のイメージのどの部分が上のイメージに現れているか、ある程度詳しく述べよ。一例として、土星の下のイメージの左側の環の影の部分を使え。その影の部分はいくつあり、それは上のイメージでどこに見えるか。表紙と説明文を同級生や友人に見せてその反応を見て書き直せ。

D.10 ダイヤモンドネックレス

表紙のアインシュタインドーナッツの内側の黒い部分にぼんやりとした細い円がある。このリングは点からなる「ダイヤモンドネックレス」である。このネックレスは $r = 3M$ の光球のちょうど外側を一周回ってきた光（図 9）によって輝いているのだ。ネックレスは非常に細く暗い。ブラックホール付近の大きな時空曲率が減光レンズのように光線を広げているからである（重力「レンズ」は好ましくない歪曲もつくり出すのだ）。原理的に、無限に多くの円形ネックレス像があり、それらは光源から我々の目にくるまでにブラックホールを 1 回、2 回、3 回、4 回... まわってくる光のためにできている。回転の回数が多くなるにつれて、軌道の半径は $3M$ に近づく。しかし回転数が多い像ほど、焦点を結びにくくなり、1 回転のものだけが見える。この細いネックレスをつくる光はあまりに強く曲げられるので、D.7 節で扱ったアインシュタインリングの近似は使えない。

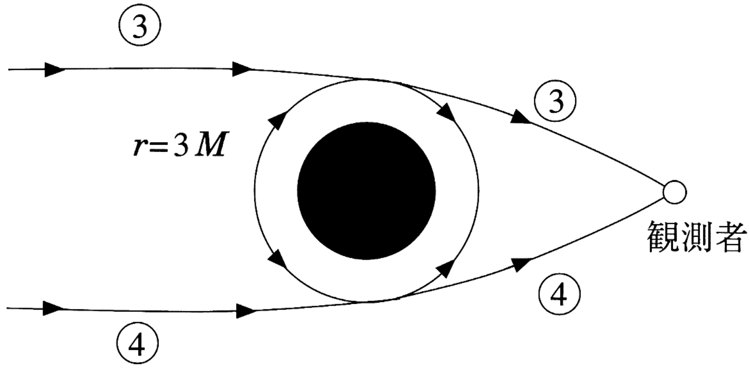


図 **D.9** 光の軌跡がダイヤモンドネックレスを作っている実例を示したシュワルツシルト地図。ダイヤモンドネックレスは表紙のアインシュタインドーナッツの中心にある。経路の円の部分は $r = 3M$ の光子の球のちょうど外側である。(**257** ページの 図 **D.8** の修正。)

> **質問 21** ネックレスを臨む角。表紙の上のイメージは（換算円周で）$r = 10M$ の球殻上で静止する観測者が見たものとして作られている。この値を 223 ページの (5.31) 式に代入し球殻観測者がネックレスを見込む観測角度を求め、答えを度で示せ。この分析では光がブラックホールを半径 $r = 3M$ の円軌道を描いていると仮定しているが、この円の r 値はわずかに $3M$ よりも大きい（求めた角度は内向きの方向に測ってあることに注意せよ。223 ページのボックスの終わりの注意を見よ)。

光が「重力」によって曲げられなかったら（曲がった時空に影響されなかったら)、表紙の上のイメージはどのように置き換わるだろうか。我々の理論である一般相対論とニュートン理論ではともに重力によって光が曲げられるので、この質問にどのように答えたらよいのか。その質問の代わりに、別の質問をしよう。ブラックホールを、重力の効果が無視できるほど小さい質量の薄い球殻に置き換えよう。さて、観測者にはこの球殻がどのくらい大きく見えるか。それでも新しい球殻の大きさをもとのブラックホールとどのように比べるか具体的に示すことに注意を払う必要がある。

質問 22 ブラックシェルの観測角度。土星と観測者の間にあるブラックホールを黒く塗った薄い金属球殻で置き換える。この球殻の質量は無視でき、もともとあったブラックホールの地平線の換算半径（ユークリッド法による測定）と同じ半径とする。観測者が球殻中心からその半径の 5 倍のところから眺める。

A. 予想：観測者が見るこの球殻の半径はブラックホールのダイヤモンドネックレスの半径よりも大きいか小さいか。予想を書け。

B. それでは、観測者が見た円盤の中心と端の間の角度を計算せよ。この角度を、中心ともともとのネックレスの間の角度と比較せよ。A で行った予想は正しかったか。

C. B の結果から、ブラックシェルを観測すると角度はいくらになるか計算し、表紙の上のイメージにあるダイヤモンドネックレスの半径の比で答えよ。黒い用紙からこの大きさの円盤を切り取って表紙の下にあるイメージの中心にテープでしばらく貼っておけ。「もし光が重力によって曲げられなかったら」、結果のイメージを示していることになっているだろう。

D.11 参照文献と謝辞

Edmund Bertschinger と Miriam L. Castellano から 7 と 9, 10 節の題材と文章を頂き、表紙のイメージを調べるのに使わせてもらった。

始めの引用：Illse Rosenthal-Schneider in *Some Strangeness in the Proportion,* edited by Harry Woolf, Addison-Wesley, Reading, MA, 1980, 523 ページ。

太陽による星の光の曲がりについての別の取扱い：Robert M. Wald, *General Relativity,* University of Chicago Press, 1984, 143–146 ページ、および Steven Weinberg, *Gravitation and Cosmology,* John Wiley and Sons, New York, 1972, 188–191 ページ。

シュワルツシルトブラックホール近くにおける光の大きな湾曲の分析と光の強度の分析については、Hans C. Ohanian, "The Black Hole as Gravitational 'Lens'," *American Journal of Physics*, Volume 55, 428–432 ページ （1987）を見よ。

光の大きな湾曲については、W. M. Stuckey "The Schwarzschild Black Holes as a Gravitational Mirror," *American Journal of Physics,* Volume 61, 448–456 ページ（1993）を見よ。

表 D.1 は Steven Weinberg, *Gravitation and Cosmology,* John Wiley and Sons, New York, 1972, 193–194 ページから許可を得て使用した。

表中の参照論文は以下の通り

a. F.W. Dyson, A. S. Eddington, and C. Davidson, *Philosophical Transactions of the Royal Society,* Volume 220A, 291 ページ（1920）; *Memoirs of the Royal Astronomical Society,* Volume 62, 291 ページ（1920）

b. G. F. Dodwell and C. R. Davidson, *Monthly Notices of the Royal Astronommical Society,* Volume 84, 50 ページ （1924）

c. C. A. Chant and R. K. Young, *Publications of the Dominion Astronomical Observatory,* Volume 2, 275 ページ（1924）
d. W. W. Campbell and R. Trumpler, *Lick Observatory Bulletins,* Volume 11, 41 ページ（1923）*Publications of the Astronomical Society of the Pacific,* Volume 35, 158 ページ（1923）.
e. W. W. Campbell and R. Trumpler, *Lick Obervatory Bulletins,* Volume 13, 130 ページ（1928）
f. E.F. Freundlich, H. von Klueber, and A. von Brunn, *Abhandlungen der Preussischen Akademie der Wissenschaften,* No.1, 1931; *Zeitschrift für Astrophysik,* Volume 3, 171 ページ（1931）
g. A. A. Mikhailov, *Doklady Akademii nauk SSSR:Comptes rendues de l'Académie des sciences de l' URSS,* Volume 29, 189 ページ（1940）
h. T. Matukuma, A. Onuki, S. Yoshida, Y. Iwana, *Japanese Journal of Astronomy and Astrophysics,* Volume 18, 51 ページ（1940）
i. G. van Biesbroeck, *Astronomical Journal,* Volume 55, 49 ページおよび 247 ページ（1949）
j. G. van Biesbroeck, *Astronomical Journal,* Volume 58, 87 ページ（1953）

VLBI radio-astronomy determination of deflection の結果は D. E. Lebach, B. E. Corey, I. I. Shapiro, M. I. Ratner, J. C. Webber, A. E. E. Rogers, J. L. Davos, and T. A. Herring, "Measurement of the Solar Gravitational Deflection of Radio Waves Using Very-Long-Baseline Interferometery" *Physical Review Letters,* Volume 75, Number 8, 1439–1442 ページ （1995）による。

Einstein ring, A. Einstein, "Lens-like action of a star by the deviation of light in the gravitational field," *Science*, Volume 84, 506–507 ページ（1936）. アインシュタインが重力による光の湾曲を 1912 年という早い時期に考えていた証拠については、Jürgen Renn, Tilman Sauer, and John Stachel, "The Origin of Gravitational Lensing:A Postscript to Einstein's 1936 *Science* Paper," *Science,* Volume 275, 10 January 1997, 184–186 ページ。

土星のイメージ、表紙の下のイメージはハッブル宇宙望遠鏡によって撮影されたものであり、アリゾナ大学、the United States National Aeronautics and Space Administration の Erich Karkoschka が撮影した。表紙の上のイメージは Edmund Bertschinger と Miriam L. Castellano による。

パチンスキーが初めて提案したマイクロレンズ効果の論文の最新版：B. Paczynski, "Gravitational Microlensing of the Galactic Bulge Stars," *Astrophysical Journal Letters,* Volume 371, L63–L67 ページ （1991）

マイクロレンズ効果による事象の発見のための 2 つの初期のプロジェクトの報告：C.

Alcock, R. A. Allsman, D. Alves, R. Ansari, É. Aubourg, T. A. Axelrod, P. Bareyre, J.-Ph. Beaulieu, A. C. Becker, D. P. Bennett, S. Brehin, F. Cavalier, S. Char, K. H. Cook, R. Ferlet, J. Fernandez, K. C., K. C Freeman, K. Griest, Ph. Grison, M. Gros, C. Gry, J. Guibert, M. Lachièze-Rey, B. Laurent, M. J. Lehner, E. Lesquoy, C. Magneville, S. L. Marshall, É. Maurice, A. Milsztajn, D. Minniti, M. Moniez, O. Moreau, L. Prévôr, F. Queinnec, P. J. Quinn, C. Renault, J. Rich, M. Sporo, C. W. Stubbs, W. Sutherland, A. Tomaney, T. Vandehei, A. Vidal-Madjar, L. Vigroux, and S. Zylberajch, "EROS and MACHO Combined Limits on Planetary-Mass Dark Matter in the Galactic Halo," *Astrophysical Journal Letters,* Volume 499, L9–L12 ページ (1998)

OGLE-II と呼ばれる現在のマイクロレンジングプロジェクトは 1999 年からうまくいっている。この題目を World Wide Web の検索のキーワードとして使え。

プロジェクトE

太陽付近で遅くなる光

- 「光がいつも同じ速さで運動する」ということに何が起きたか。
- 光は太陽の近くで遅くなると誰が言ったのか。
- 太陽の近くで光はどれだけゆっくりになるのか。
- 減速の予測値は観測で確かめられたのか。

なぜ私が相対論を発展することができたのかと自問することがある。その理由は、ふつう大人は空間と時間を考えるための時間をつくらないためだと思う。そんなことは子どもの頃にしていたことだ。しかし、私の知的発育は遅れていた。そのために、十分成長してようやく空間と時間が不思議に思われるようになったのだ。

—アインシュタイン

E.1 始めに

シュワルツシルト記録係が記録すると、球殻観測者や自由浮遊観測者よりも「光の速さが小さい」ことになる。ブラックホール付近では記録係の光速は決定的に 1 よりも小さい。それが 205 ページの (5.3) 式と (5.4) 式と 211 ページの (5.16) 式の分析の予測であった。一体この予測に物理的な意味があるのだろうか。遠方観測者が測定する、この「光の減速」を測る方法があるのだろうか。

実はそれが「ある」のだ。シャピロ（Irwin Shapiro）がその方法を予測し、彼とその共同研究者によって示された。彼らが示したものは、太陽をかすめて進む光の全通過時間が平坦時空で予想されるものよりも長くなるだろうというものだった。それで、彼らは惑星が太陽の反対側に来たときに、電波信号（光よりも低い周波数の電磁波であるが、光速で伝わる）が往復する時間を、最初に地球と水星の間で測り、そして地球と金星間、最後に地球と火星間で測った（火星については図 1)。地球の観測者が太陽に近づいた金星の像を見ると、太陽近くで遅くなるため、電波信号の往復時間はほぼ 190 マイクロ秒増加する (図 3 を見よ)。

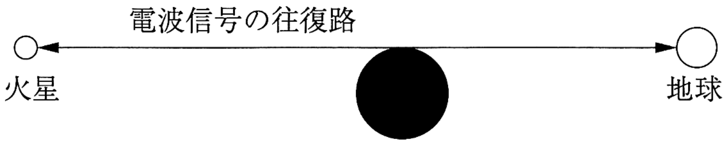


図 **E.1** 地上の追跡基地（右）と火星表面のバイキング探査機（左）の間の往復の途中で太陽表面をかすめる電波信号の経路の図。スケールは正しくない。経路は太陽付近で曲げられるのだが、**2** 秒角以下でしかなく、この図または以降の図では示すことができない。

光が地球から太陽を通り過ぎて金星に行き、再び復路を戻ってくるまでのずっと長い時間の中で、190 マイクロ秒の遅れをいったい誰が検出すると言うんだい。往復にはほぼ 30 分かかる。地球と火星は別の軌道上にあり、その間の距離は絶えず変わっているのだからもっと難しくなる。

それはシャピロと共同研究者が乗り越えた数多く困難のうちの一つだ（他にも**コロナ**と呼ばれる太陽表面付近のイオンの雲を電波が通過するとき電波の速さが不確かになることが知られている）。金星が地球から見て太陽に近くないとき、時間の遅れの効果は小さい。原理的に、地球から見て金星が太陽に近づき、通りすぎ、離れていくときに、信号の往復時間を追跡することができる。地球と金星間の距離が徐々に変化することから、時間の遅れを滑らかな曲線にできる。光が遅くなることで加わる時間の遅れは図 3 の金星ではスパイクのように見える。実際には、シャピロとその共同研究者は同時に使えるすべてのデータによってずっと洗練された分析を行った。

太陽表面をかすめる光や電波の往復時間として、190 マイクロ秒（金星）またはもっと正確に決められた 250 マイクロ秒（火星）の値を予測できるか？ そう、できるのだ。以下に詳しく述べる近似を使えば。

E.2 光路の近似

実際に「かすめる」光は図 2 の細い線で太陽に近づく。実際の経路では、光は半径方向にも方位角方向にも進まない（実際にかすめる点は除く）。したがって半径方向や方位角方向の速度の式、205 ページの (5.3) 式と (5.4) 式は使えない。かすめる経路の式である 211 ページの (5.16) 式でさえ積分がやっかいだ。そこで、わずかに違った光路を仮定する。地球から半径方向にやって来て、太陽を方位角方向に半円を描き、そして金星や火星にまっすぐ進む（図 2 の太い線）。この次善の経路は実際の経路の粗いモデルである。しかし、思ったよりも正確な計算結果になる。それでは詳しくみてみよう。

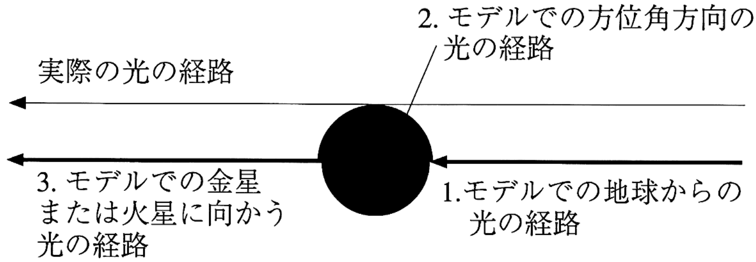


図 **E.2** 地球から金星（または火星）に進む途中、太陽の表面をかすめる光や電波信号の時間の遅れのモデル。実際の経路は細い線である。我々のモデルではこの経路を番号のついた **3** つの区間で置き換える。区間 **1**：地球から太陽表面へ向かう半径方向の経路。区間 **2**：太陽の表面を半円としてかすめる接方向の経路。区間 **3**：太陽から金星（または火星）へ向かう半径方向の経路。

E.3 半径方向の区間

図 2 の区間 1 から始めよう。205 ページの (5.3) 式にしたがうと半径方向の光の運動は（正負の符号は省略）

$$\frac{dr}{dt} = 1 - \frac{2M}{r} \tag{E.1}$$

となる（式中では光の運動を表す $m = 0$ の表示も省略した。このプロジェクトの式はすべて光の運動を表しているからである）。(E.1) 式を使うと、光が太陽を中心とする半径 R のところから地球の遠い軌道半径 r_{Eorbit} にまで進むのに必要な全遠方時間を求めることができる。（積分をする向きはどちらでもよい。ここでは光は外側に進むと仮定せよ）そして、区間 1 の全時間は

$$dt = \frac{dr}{1 - \dfrac{2M}{r}} \tag{E.2}$$

を積分することで得られる。

ここで $2M/r$ はとても小さく、最も大きな値になるのは太陽表面である。おおよその値は $2M \approx 3000$ メートルと $R \approx 7 \times 10^8$ メートルである。よって、$2M/r$ の最大値は 4×10^{-6} であり、1 よりもずっと小さい。したがって単純な近似（このプロジェクトで数回使ううちの 1 回目）

$$(1+d)^n \approx 1 + nd \qquad |d| \ll 1 \text{ でしかも } |nd| \ll 1 \text{ のとき} \tag{E.3}$$

を使うことができる。この近似は d が正または負、 n が正または負、分数のべきのとき使える。

質問 1 地球と太陽間の時間の遅れ。 (E.3) 式を (E.2) 式に使い、両辺を太陽の半径 R から地球の半径距離 r_{Eorbit} まで積分せよ。その結果が 2 つの項になり、1 つが単に太陽表面から地球までの距離であり、光がふつうの速さ 1 で進んだときにメートルで測った時間に等しいことを示せ。第二項は一般相対論で予測される光の時間の遅れである。区間 1 におけるこの遅れ Δt_1 が

$$\Delta t_1 = 2M \ln\left(\frac{r_{\text{Eorbit}}}{R}\right) \tag{E.4}$$

であることを示せ。

質問 2 地球と太陽間における時間の遅れ。 巻末公式一覧の数値を代入して、この第一区間の時間の遅れ Δt_1 が近似的に約 53 マイクロ秒になることを示せ。

質問 3 太陽と金星間の時間の遅れの値。 同じ方法を太陽から金星までの区間 3 について行え（半径運動において方向は関係ないことを思い出せ。光はどちらの方向でも同じようにゆっくり進む）。金星の軌道の平均半径は 1.08×10^{11} メートルである。金星のこの区間における時間の遅れはいくらか。

質問 4 太陽と火星間の時間の遅れの値。 火星の軌道の半径の平均値として $r_{\text{Morbit}} = 2.28 \times 10^{11}$ メートルを使い、太陽から火星までの区間における時間の遅れが約 57 マイクロ秒であることを示せ。

E.4 方位角軌道の区間

図 2 の太陽の周りの半円を軌道モデルの 1 部分とし区間 2 と呼ぶ。そのときの速さは 205 ページの (5.4) 式の方位角速度と等しいと仮定する（符号は省略）。

$$\frac{ds}{dt} = r\frac{d\phi}{dt} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} \tag{E.5}$$

図 2 の区間 2 の全体にわたって $r = R$ を仮定する。そして、光が区間 2 を通り過ぎる時刻 t_2 は (E.5) 式を dt について解き、長さ πR の半円に沿って足し合わせることによって得られる。

$$t_2 = \frac{\pi R}{\left(1 - \dfrac{2M}{R}\right)^{1/2}} \tag{E.6}$$

質問 5 太陽を回る時間。 (E.3) 式の近似を再び使い、区間 2 の通過時間を求めよ。これまでと同様、結果は 2 つの部分に分かれ、一つは、光が速さ 1 で太陽の周りの半円を進む時間である。もう一つは、一般相対論で予測される遅れ Δt_2 である。この遅れが約 15 マイクロ秒であることを示せ。

E.5　予測と観測の比較

> **質問 6　金星についての往復時間の遅れ。** 地球から金星までの 3 つの片道区間について時間の遅れを足し合わせよ。往復とするために 2 倍せよ。図 3 に、地球から見て、金星が太陽の縁に近づくが接しない場合の結果を示した。太陽の縁の結果はシャピロのプロットの最大値よりも大きくなるべきか、小さくなるべきか。実際のところどうか。
>
> **質問 7　火星についての往復時間の遅れ。** それでは、地球から火星までの 3 つの片道区間について時間の遅れを足し合わせよ。往復とするために 2 倍して、全往復時間が約 250 マイクロ秒であることを示せ。

何と幸運なんだろう。地球と火星間の往復時間の遅れを計算すると 250 マイクロ秒であることが得られた。この値は観測結果に非常に近く、計算結果はシャピロの正確な計算値とも近い。シャピロの計算では (1) 経路は太陽をかすめてまっすぐ通過し (2) 地球-太陽-火星の距離は実験の時刻で正確なものを使っている。

図 3 と 4 にそれぞれ金星と火星に対するシャピロと共同研究者の結果を表した。

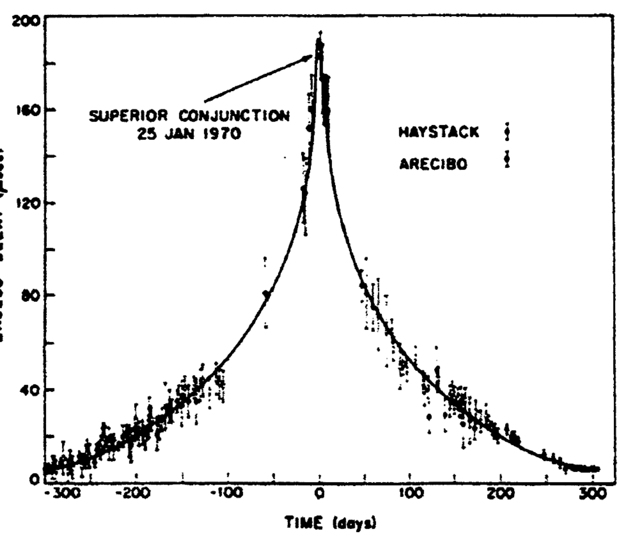


図 E.3　火星までの往復電波信号の時間の遅れ。シャピロ (**Irwin Shapiro**) と共同研究者が **1970** 年 **1** 月に測定した。地球から見ると、金星が太陽の縁に近づくが、隠れることはなかった。この実験で、信号は金星で反射された。太い曲線は一般相対論の予測である。点と垂直の誤差棒は実験値である。このプロジェクトの終わりの参照文献を見よ。

質問 8　月までの距離。宇宙飛行士は月面に反射鏡をいくつか置いてきた。それは部屋の角のような形をしており、入射したどんなレーザーパルスでも経路を逆転するような性質を持っている。ウィル（Clifford Will）が書いているように（このプロジェクトの終わりの参照文献の第 7 章）、地球から送られたレーザーパルスはレーザー発信器から月の反射鏡間の距離を測ることができる。初期の不定性は約 15 センチメートルだったが、最近では 1 センチメートルの範囲にまで減った。シャピロの時間の遅れはこの測定値の中に取り入れなければならないだろうか。地球と月の近くにおける時空の曲がりによって光が遅くなる効果を採り入れなければ、距離の測定は間違っていることになるのだろうか。もしそうなら、測定の誤差はどうなるか。月までの旅行で、パルスは地球の重力場から出て行き、月の重力場に入って行くことが要点である。復路では方向は逆になるが、時間の遅れはどの方向でも加算される。ヒント：（1）(E.4) 式を地球と月に別々に使え。(2) 地球と月の中心間の平均距離は巻末公式一覧にある。(3)（ニュートンなら言うであろう）地球と月からの重力が等しくて方向が逆になっている「平衡点」は地球の中心から月の中心までの距離の 0.90 倍のところにある。(4) 質量の比は $M_{\mathrm{Moon}}/M_{\mathrm{Earth}} = 0.0123$ である。(5) 地球に対する月の半径比は $r_{\mathrm{Moon}}/r_{\mathrm{Earth}} = 0.273$ である。

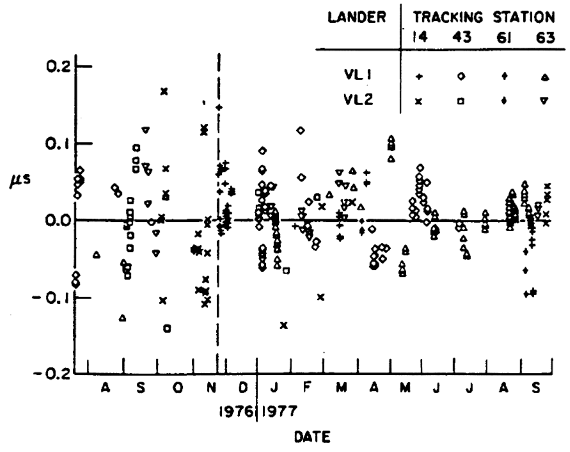


図 E.4　火星に対する時間の遅れの最終結果。シャピロと共同研究者は火星の表面のバイキング探査機を使うことにより往復信号の振幅を増加した。地球からの電波信号はバイキングからの返信の引金となる。この図は、観測データと一般相対論の予測との差（専門用語では残差）を表している。垂直な破線は **1976** 年 **11** 月 **25** 日の火星が太陽に最も近づいた時刻を表している。この図は図 **3** よりも見劣りするようである。しかし一般相対論をずっと多く「捻出」している。縦軸のスケールは **1/10** マイクロ秒である。このプロジェクトの終わりの参照文献を見よ。

質問 9 時間差のある再生。議論問題。 我々はブラックホールの周りの安定な自由浮遊円軌道にいる。レーザー信号にメッセージを暗号化し自分自身に送る。レーザーパルスを内向きに発信し、その軌跡は我々よりもブラックホールに近づき、我々の軌道を横切るようになっている。軌道上のどこか別の場所に来たときに、自分の送った信号を受信できるように光の遅延効果を使うことができるか。できないのなら、なぜできないのか。できるのなら、自分のメッセージを受信するとき、経験できる遅延時間の長さにはどんな制限があるか。ヒント：217 ページの図 6 を見よ。

E.6 参照文献と謝辞

始めの引用。*The Quotable Einstein,* Alice Calaprice 編集、Princeton University Press, 1996, 182 ページ、および *Albert Einstein,* Albrecht Fölsing, Penguin Books, New York, 1997, 13 ページ。

図 3 "Fourth Test of General Relativity: New Radar Result," Irwin I. Shapiro, Michael E. Ash, Richard P. Ingills, William B. Smith, Donald B. Campbell, Rolf B. Dyce, Raymond F. Jurgens, and Gordon H. Pettengill, *Physical Review Letters,* Volume 26, Number 18, 1132–1135 ページ（1971 年 3 月 3 日）。

図 4 R. D. Reasenberg, I. I. Shapiro, P. E. MacNeil, R. B. Goldstein, J. C. Breidenthal, J. P. Brenkle, D. L. Cain, T. M. Kaufman, T. A. Komarek, and A. I. Zygielbaum, "Viking Relativity Experiment: Verification of Signal Retardation by Solar Gravity," *Astrophysical Journal Letters,* Volume 234, L219–L221 ページ（1979 年 12 月 15 日）。

太陽の近くを通る電波信号の時間の遅れを確かめる実験の魅力的な物語は Clifford M. Will の本 *Was Einstein Right? Putting General Relativity to the Test*, Second Edition, Basic Books/Perseus Group, New York 1993 第 6 章。

シャピロはこのプロジェクトを読み、コメントをくれた。

質問 8 は Glen Govertsen の提案によるものである。質問 9 は Charles Holbrow の提案によるものである。

プロジェクトF

自転するブラックホール

- ブラックホールはどれだけ速く自転することができるのか。
- 自転するブラックホールの周りで起きる空間の引きずりはどうやったら観測できるか。
- 速く自転するブラックホールでは地平線を越えて落下しないようにできるのか。
- クエーサーでは 1 年当たり何太陽質量が光に変えられているか。

ブラックホールは太陽質量の数倍から数百万倍まで幅のある質量をもつ巨視的物体である。ある程度まで静止し孤立していると考えてもよいだろう。その範囲でその各々ののブラックホールのすべてはカー解によって記述される。これは巨視的な物体が厳密に記述される唯一の例である。見回すとわかるように、巨視的物体は様々な物理理論のいろんな近似から導出される様々な力に支配されている。それに対して、ブラックホールを構成する唯一の要素は空間と時間の基本的な概念だけである。定義からほとんどわかるように、宇宙にある最も完全な巨視的物体である。そして、一般相対論でブラックホールを記述する解には一意的な 2 パラメータ群しかないため、それらはもっとも単純な物体と言える。

— チャンドラセカール（S. Chandrasekhar）

F.1　初めに

このプロジェクトでは自転するブラックホールの性質をいくつか調べる。それと似た性質を使って自転する地球表面やその他の帯電していない天体の外部の時空を表わすことができる。ブラックホールではこれらの性質は非常に著しい。自転するブラックホールの十分近くでは、その地平線の外側であっても、自転の方向に流されないように抵抗することができない。全エネルギーは負になることができ、原理的には、地平線の外側からブラックホールの回転エネルギーを利用することができる。

自転するブラックホールは存在するのか？ 基本的な質問は次の通りだ：ブラックホールは存在するのか？ もし存在するのなら、天体のほとんどがふつう自転しているように、ブラックホールの自転は避けられないものなのか？ それに対する根拠として、ブラックホールを除いて最もコンパクトな天体である中性子星を考えよう。自転する中性子星（パルサー）から電波、X 線のパルスが発見されたことから、多くの中性子星は自転しており、そのうちのあるものは非常に速いことがわかっている。これらは、太陽よりも多少重く、数ミリ秒で 1 回自転するという、非常に印象深い構造をしている。結論として、もしブラックホールが存在していれば、自転するブラックホールも存在することになる。

一般相対論の予測によると自転し孤立した星がブラックホールに崩壊すると、重力波によって自転に関するどんな不規則性もすばやく均されてしまう。それ以降、自転するブラックホールの地平線外の計量はこのプロジェクトで使われるカー計量になるだろう。

しかし、自転しているブラックホールすべてが孤立しているわけではなく、周りから引き寄せた物質に囲まれていることが多い。その結果、渦巻く**降着円盤**ができ、その質量は、ここで分析する自転し孤立したブラックホールから離れた時空の計量を歪め、周りの時空に影響を与えるかもしれない。

F.2 ブラックホールの角運動量

自転し帯電しないブラックホールはたった 2 つの量で完全に決まってしまう。それは質量と角運動量である。第 4 章（155 ページ）で自転しないブラックホールを軌道運動する粒子の単位質量当たりの角運動量を $L/m = r^2 d\phi/d\tau$ で定義した。この式で角度 ϕ には単位がなく、固有時にはメートルの単位がある。したがって L/m の単位はメートルである。混乱を避けるため、質量 M の自転するブラックホールの角運動量を J で表わし、単位質量当たりの角運動量を J/M で表す。J/M はこれからの解析であまりに頻繁に現れるので、固有の記号 $a = J/M$ を使う。この定数 “a” を**角運動量パラメータ**と呼ぶ。自転していないブラックホールを軌道運動する石の角運動量 L/m がメートルの単位を持つように、角運動量パラメータ $a = J/M$ もメートルの単位を持つ。以下では、角運動量パラメータ a を正のスカラー量として扱っても問題ないだろう。

ニューマンとその他の人々は正味の電荷をもち自転するブラックホールの計量を発見した（帯電し自転しないブラックホールの計量については F.14 節の参照文献と (F.51) 式を見よ）。最も一般的な定常状態のブラックホールは質量と角運動量、電荷をもつ。だが、天体が計量に影響を与えるほど十分大きな正味の電荷をもっているという証拠はない。もし実在のブラックホールが帯電していなければ、カー計量は自然界に存在する最も一般的な安定でしかも孤立しているブラックホールを記述する。

F.3 赤道面でのカー計量

簡単のため、角運動量 J と質量 M をもつ自転するブラックホールの**赤道面**における時空と粒子の運動を調べることにしよう。赤道面は自転するブラックホールの中心を通る面で、自転軸と垂直である。

ここに赤道面での**カー計量**を示す。これは**ボイヤー-リンキスト座標系**（Boyer-Lindquist coordinate）と呼ばれる。角運動量パラメータ $a = J/M$ が見慣れない場所にいくつか現れている。

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{4Ma}{r} dt d\phi - \frac{dr^2}{1 - \dfrac{2M}{r} + \dfrac{a^2}{r^2}} - \left(1 + \frac{a^2}{r^2} + \frac{2Ma^2}{r^3}\right) r^2 d\phi^2 \quad \text{(F.1)}$$

第 2 章から第 5 章まで調べてきた自転しないブラックホールに対して、シュワルツシルト計量では、ブラックホールの中心を通って切り取った面はどれも同じであった。シュワルツシルト計量が球対称だからだ。自転するカーブラックホールでは状況は全く異なる。計量 (F.1) は、ブラックホールの中心を通り、回転軸と垂直な平面で起きる事象に対してのみ正しい。最も簡単で最も興味深い結果を示すため、我々は赤道面を選ぶ。

(F.1) 式の時間 t は引力中心からずっと離れた時計で記録される「遠方時間」である。ちょうどシュワルツシルト計量で使われた時間である。それに対して $a > 0$ におけるボイヤー-リンキスト r 座標は、シュワルツシルト計量であったような単純な意味を持たない。r の意味については、F.4 節と F.9 節で詳しく述べる。計量 (F.1) は帯電せず自転するブラックホールの外部の時空を完全に記述する。その（非量子的な）性質について、そして（極値的加齢の原理を使った）赤道面上の自由粒子とフラッシュ光の軌跡についてあらゆる可能な質問に答えるためにこれ以上の情報を必要としない。

自転ブラックホールはカー計量によって非量子的ではあるが完全に記述されると聞いた。なぜこの保留条件があるのか。一般相対論を量子現象に適用するために何をこれ以上知る必要があるのか。

その答えとして、ホーキング (Stephen Hawking) が、宇宙の始まりにおける時空の「特異点」を議論しているので耳を傾けよう。同じようなコメントがどんなブラックホールの内側にある特異点にも適用できる。

相対論の一般理論はいわゆる古典論と呼ばれるものである。すなわち、位置と速度の両方を同時に測定できないという量子力学の不確定性原理が存在するため、粒子の位置と速度は正確に決められず狭い領域にぼんやり広がっているという事実を考慮していない。普通の状況では、時空の曲率半径が位置の不確定性に比べて非常

に大きいため問題にならない。だが特異点定理から宇宙の膨張期の初め［またはブラックホールの中心］においては曲率半径は小さく、時空は大きく歪んでいただろう。この状況では、不確定性原理が非常に重要になるだろう。したがって一般相対論は特異点を予言することによって自滅することになる。宇宙の始まり［またはブラックホールの中心］を議論するために、一般相対論と量子力学を融合する理論が必要である。

—ホーキング（Stephen Hawking）

提案：これから進んでいくが、このプロジェクトのすべての式の単位と式、それに自ら導出した式をチェックせよ。単位が正しくても式は間違っているかもしれないが、単位が間違っていればその式は正しいはずがないからだ。

自転するブラックホールがクエーサーにエネルギーを供給しているのか。

孤立して死んでいるブラックホールに比べて、全宇宙で我々が知っているか、頭に浮かべられるか、または見ることのできる最も力強い定常エネルギー源は、数百万太陽質量の自転ブラックホールからエネルギーを供給されているのかもしれない。螺旋しながら落下する膨大な量の物質をブラックホールは貪欲に呑み込んでいる。1956 年にパロマー天文台で研究していたシュミット（Maarten Schmidt）はこれらの**準星状天体**（quasi-stellar object）または**クエーサー**（quasar）の証拠を初めて発見した。これらの天体は、10 億キロメートルどころではなく、数 10 億光年離れたところにある星状の光源である。典型的なクエーサーはどの銀河と比べてもかなり小さいのだが、1 兆個もの星を含む天の川銀河全体の数百倍以上の出力をどうにかして発生させている。

観測と理論を駆使して、クエーサーがどのようにはたらいているのかを大まかに説明しようとしてきた。数億太陽質量の自転するブラックホールはそれ自身たぶん降着によってできたものであり、周りからたくさんの質量を集めている。降ってくるガスおよび、ガスに変えられる星は、栓が抜かれるとき湯舟の排水口に直接水がすぐに流れるのとは違い、直接には落下しない。このガスはぐるぐる周りながら、重力が絶えず強くなる領域へとゆっくり進んで行く。この過程で、ガスは圧縮され熱せられ最終的には正イオンと負イオンに別れ、広い波長帯で豊富な輻射量を発送することになる。落下物体が弱い磁場をもっていると、圧縮され大いに強められる。これらの磁場は、巨大な降着円盤の中へ渦巻いて行く電子とイオンに関連がある。物質はこの降着円盤の内側の境界へと少しずつ進み、落下の最終段階で、粒子の足場は消えてしまう。したがって、物質が少しずつ落下することで質量を 100 パーセントのエネルギーとして引き出す機会は失われる。しかしながら磁場は強くイオンを捕らえ、質量の数パーセントを輻射のエネルギーとして十分効率よく、十分長い時間引き出す。それに対して核融合や核分裂では 0.1 パーセント程度を超える変換効率が得られない。これまで、自転するブラックホールへ降着させる以上に物質のかたまりを効率よくエネルギーに変換させる過程の証拠を見た者はおらず、クエーサーの活動を説明する実行可能な仕組みを思い付いた人もいない。さらに詳しくは F.11 節を見よ。

質問 1　角運動量 0 の極限における赤道面のカー計量。 角運動量 0（$a = J/M = 0$）に対して、カー計量 (F.1) がシュワルツシルト計量（公式集 の (A)）になることを示せ。

質問 2　運動は平面内に留まる。 自転するブラックホールの赤道面で軌道運動し始めた自由物体は赤道面にとどまり続けることを対称性から議論せよ。

カー計量は、シュワルツシルト計量から区別できる 4 つの中心的な特徴をもっている。

カー計量の第一の新しい特徴は地平線に新しい r の値を持っていることである。 シュワルツシルト計量では、dr^2 の係数は $1/(1-2M/r)$ である。この係数はシュワルツシルト地平線 $r_{\mathrm{H}} = 2M$ で際限なく増加する。それに対して、カー計量では、引き返せない位置である地平線の r 値は角運動量パラメータの値 a に依存する（注意：地平線が存在するという本当の証明をするためには、世界線が内側に通過でき、外側には通過できないことを示す必要がある。自転しないブラックホールに対する証明については、プロジェクト B の 139 ページから 141 ページを見よ。dr^2 の係数がふっ飛ぶ位置を地平線に選ぶことは、正しけいのだけれども直感的な選択である）。

質問 3　地平線の半径座標。 自転するブラックホールに対して dr^2 の係数は

$$r_{\mathrm{H}} = M \pm (M^2 - a^2)^{1/2} \tag{F.2}$$

で際限なく増加することを示せ。最初に正の符号の場合を調べよ。$a = 0$ のとき r_{H} はどんな値になるか。自転するブラックホールに対して、r_{H} の値はシュワルツシルト地平線の対応する r の値よりも大きいか小さいか。

以下では特に断わらない限り、「地平線」と書いたときには、(F.2) 式の正の符号の場合を指す。

研究ノート：(F.2) 式で負の符号を選ぶと、第二の地平線になり、正の符号の地平線の内側にある。この内側の地平線は**コーシー地平線**と呼ばれる。理論的研究から、外側の地平線のすぐ内側でしかも内側の（コーシー）地平線へ下るほとんどの手段に対して（カー計量で正しく表され）時空は安定になることが示されている。しかし、コーシー地平線近くで時空は不安定になり、カー計量では表せ**ない**。コーシー地平線にはいわゆる**質量インフレーション**特異点が存在する。これは 130 ページのボックスで述べた。コーシー地平線で質量インフレーション特異点が存在することは、自転するブラックホールの外側の地平線と中心の間の領域を自ら体験したいと望むダイバーにとって、よい兆となろう。以下のまじめな理論研究論文の文章は朗報となるだろう：「このような結果から以下のことが強く示唆される。一般的な崩壊で形成されるブラックホールで、内側の（コーシー）地平線に落下する観測者は外側の宇宙の全未来の歴史があっという間に目の前を通り過ぎるの

見た後に（量子的でなく古典的な）無限の密度の壁に呑み込まれるはずである」（ポアソンとイスラエル）

F.4　最大角運動量のカー計量

このプロジェクトでは、形式的なことがらを最小に抑えながら、自転ブラックホールに関する核心的な特性を明らかにしたいと考えている。最大の回転率を持つ自転ブラックホールの場合に式は簡単になる。

質問 4　角運動量の最大値。 ブラックホールにはどれくらいの「活力」があるのか。つまり、角運動量パラメータ $a = J/M$ はどれくらい大きくなることが可能か。r_H と矛盾しない角運動量パラメータの最も大きな値が $a = M$ であることを示せ。この角運動量パラメータの最大値は角運動量 $J = M^2$ と等しい。この場合、内側の（コーシー）地平線で何が起きるか。

質問 4 で得られた最大自転率のブラックホールは**最大極限カーブラックホール**と呼ばれる。現存するブラックホールはどれくらい速く自転しそうか。どれくらいの「活力」があるのか。ミスナーとソーン、ホイーラーに訊いてみよう（885 ページ）。「崩壊してブラックホールになる天体（重い星や銀河核、・・・）のほとんどは非常に大きな角運動量を持っているので、できたブラックホールは“活きがよい”（角運動量パラメータ $a = J/M$ はほとんど M に近い、つまり J はほとんど M^2 に近い）はずだ」

質問 5　太陽の最大角運動量は？ 太陽の最近の角運動量の評価値は 1.91×10^{41} キログラム メートル ^{2}/秒である。太陽の角運動量パラメータ $a = J/M$ の値はいくらか。メートルの単位で答えよ（ヒント：上の数値をキログラムの単位の太陽の質量 M_{kg} で割って、メートル ^{2}/秒の単位の途中結果を求めよ。この結果をメートルの単位にするための変換因子として何を使えばよいか）。カー計量での最大値は a/M でいくらか。

最大極限で自転するブラックホールの赤道面における計量は、(F.1) 式で $a = M$ とすると

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{4M^2}{r}dtd\phi - \frac{dr^2}{\left(1 - \dfrac{M}{r}\right)^2} - R^2 d\phi^2 \quad \boxed{\text{最大極限カー}} \quad \text{(F.3)}$$

になる。カー計量の dr^2 の項の分母がシュワルツシルト計量の dr^2 の項と 2 通りの意味で違うことに注意せよ。ここで分母は 2 乗になっているし、$2M/r$ ではなく M/r になっている。

(F.3) 式は

$$R^2 \equiv r^2 + M^2 + \frac{2M^3}{r} \qquad \boxed{\text{最大極限カー}} \quad \text{(F.4)}$$

と定義することによって簡単になっている。(F.3) 式の右辺の最後の項 $R^2 d\phi^2$ から、R が最大極限カー時空の**換算円周** であることがわかる。つまり R の値は、ブラックホールの中心を通る平面内の静止リングの円周を測り、2π で割ることによって得られる。このことは、換算円周は r ではなく、(F.4) 式から得られる数値であることを意味する。r を R を使って表すためには、r の 3 次方程式を解く必要があり、ややっこしい代数計算をしなければばならない。ここでは式を解くのではなく、むしろ R と r が両方入った式を使うことにする。(F.4) 式から、r が大きくなっても R が r と等しくならないことに注意すべきである。ただし、R と r の差の比率は r が大きくなると小さくなっていく。

> **質問 6　R の極端な値。**最大極限で自転するブラックホールの地平線の r の値 r_H はいくらか。地平線の R の値 R_H はいくらか。R と r の値の差が 100 万分の 1 以下になるような r の近似的な範囲を求めよ。

> **質問 7　より一般的な R_a 。**(F.1) 式の任意の角運動量パラメータ a がより一般的な値の場合、R^2 はどうなるか（これを R_a^2 と呼ぶ)。自転していないという極端な場合の R_a はいくらか。

さて、カー計量における第一の新しい特徴である地平線の r の値について考察を終え、これから**カー計量の第二の特徴**へ進もう。それは 2 つの時空座標の積 $dtd\phi$ の存在だ。これを**クロス積**と呼ぶ。クロス積の存在から、座標 ϕ と t に密接な関係があることが考えられる。以下の節ではカー計量から**慣性系の引きずり**が予測できることを示そう。「慣性系の引きずり」とは何か？ 引力中心近くではどこでも、観測者を静止させて固定した半径に配置するためには、ロケットを使って半径方向に推進させる必要がある。自転するブラックホール近くでは、初めに物体の位置を固定して配置するときには接方向（軌道上での運動における接線方向。半径方向に対して垂直な方向）にもロケットの推進力が必要になる。そのときには、頭上の決まった位置にある星が動いているように見えてはいけない(290 ページのボックスを見よ)。時空は自転するブラックホールによって押し流されていると言う人がいるかもしれない。そうでなく時空それ自身が動いているのだ。

特に断わらない限り、これからのことはすべて最大極限カーブラックホールの周りの赤道面について行う。

F.5　定常限界

カー計量の第三の新しい特徴はいわゆる**定常限界**の存在である。回転するブラックホールの地平線は $r = 2M$ より内側にある（(F.2) 式の正の符号)。地平線は計量の dr^2 の係

数がふっ飛ぶところである。それに対して、赤道面では dt^2 の係数つまり、$(1-2M/r)$ が $r=2M$ でゼロになる。ちょうど、自転していないブラックホールのシュワルツシルト計量でそうであるように。赤道面で dt^2 の係数が 0 になる r の値 $r=2M$ は**定常限界**と呼ばれる。(F.3) 式と (F.1) 式をよく調べると、角運動量パラメータの値 a が何であっても赤道面で定常限界の式が同じであることが示せる。つまり

$$r_S = 2M \tag{F.5}$$

である。

定常限界という名は、r_S よりも小さな半径 (しかし地平線 r_H よりも大きい) では観測者が静止できない、つまり定常的に留まることができないという予測から付けられている。定常限界と地平線の間の空間は**エルゴ球**と呼ばれる。エルゴ球の内側ではブラックホールの回転の方向に引きずられることが避けられない。回転の接線方向にロケットを噴射しても、一定の角度 ϕ に留まることはできない。観測者にすれば、遠くで静止している星は頭上に留まることができない。原理的に、慣性系の引きずりは自転する天体の近くでわずかながらだが観測される可能性がある。実験用の人工衛星 (Gravity Probe B) は現在スタンフォード大学で製作中であり、極端に小さい慣性系の引きずりの効果が自転する地球近くで予測されているが、それを測定するであろう[*1]。それに対し、回転するブラックホールの定常限界の内側では、これ以降のページで述べるように、慣性系の引きずりには逆らえない。

ここでは考察しないが、空間 3 次元のカー計量から、すべての方向で地平線は一定の r の値（つまり球面）にあるが、定常限界ではカスプ（尖点）が両極にできることがわかっている。図 1 にこの結果がある。この図はカー記録係 （ボイヤー-リンキスト）座標系で描かれており、これらの構造を眺める可能な方法のうち一つだけを示している。図 1 は r/M の代わりに換算円周 R/M でプロットしてあり、赤道面での地平線の半径は回転軸に沿った半径よりも大きい。そのため、地平線はハンバーガーのバンズのような形になっている。

質問 8　定常限界の換算円周。最大極限ブラックホールについて、赤道面での定常限界の換算円周 R_S を求めよ。求めた結果を図 1 と (F.4) 式を使って確認せよ。

質問 9　自転するブラックホールを上から表示する。赤道面内の最大極限ブラックホールの断面を描け。すなわち、図 1 の鉛直軸に沿って見下ろしているかのように、図 1 の水平軸で切った平面上にある定常限界と地平線を記録係座標系で示せ。その図に定常限界と地平線、エルゴ球をそれらの半径に書き込め。

[*1] 訳注：Gravity Probe-B は 2004 年 4 月 20 日（日本時間では 21 日）に打ち上げられた。衛星の心臓部に、航空機の姿勢監視に使うものよりはるかに高感度なジャイロスコープを 4 つ搭載。高度約 640 キロの極軌道を 1 年以上回り、ジャイロスコープが検出するわずかなずれを調べる。

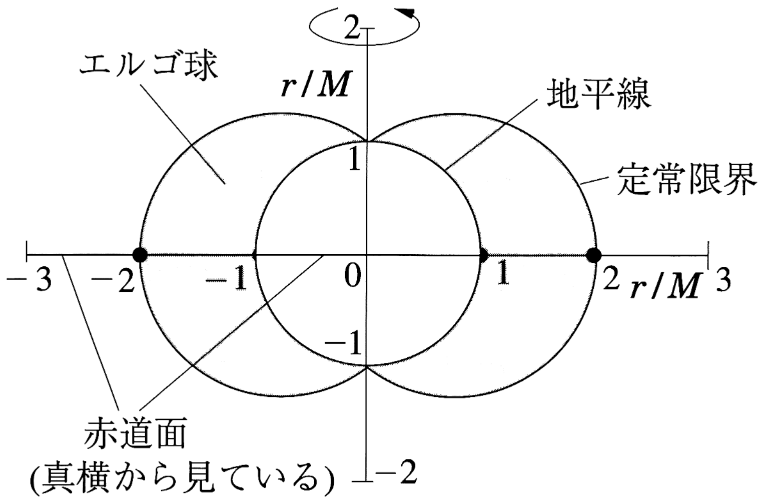


図 F.1 最大極限ブラックホールの断面のコンピュータプロット。カー記録係（ボイヤ-リンキスト）座標 r（R ではない）を使った定常限界と地平線を示してある。地平線の内側からはどんな物体も、光の速さで運動する物体でさえも脱出できない。地平線と定常限界の間にはエルゴ球があり、図中では影がつけてある。このエルゴ球内のすべてのもの、光でさえもブラックホールの回転に流される。エルゴ球の内側でも石は負の全エネルギーをもつことができる（**F.10** 節）。

ここから赤道面内の定常限界の性質に迫ってみよう。初め ϕ 方向に（$dr = 0$）動いているフラッシュ光の場合についてカー計量を調べよう（赤道面内の初期運動は接方向だけである。後に半径方向に曲げられるかもしれない）。光であるため、経路上で近接する事象間の固有時は 0 である：$d\tau = 0$. 計量 (F.3) 式にこれらを代入して、dt^2 で割り、整理し直すと

$$R^2\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 - \frac{4M^2}{r}\left(\frac{d\phi}{dt}\right) - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) = 0 \qquad \boxed{\text{光 } dr = 0} \quad \text{(F.6)}$$

となる。(F.6) 式は角速度 $d\phi/dt$ の 2 次式である。

質問 10 光の接方向の運動。 (F.6) 式を $d\phi/dt$ について解け。答えが以下の 2 解になることを示せ（整理すると 281 ページの (F.11) 式になる）：

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{2M^2}{rR^2} \pm \frac{2M^2}{rR^2}\left[1 + \frac{r^2R^2}{4M^4}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\right]^{1/2} \qquad \boxed{\text{光 } dr = 0} \quad \text{(F.7)}$$

定常限界（$r = 2M$ でしかも $R^2 = 6M^2$）でこの式を詳しく見よう。二つの解は

$$\frac{d\phi}{dt} = 0 \qquad \text{および} \quad \frac{d\phi}{dt} = \frac{4M^2}{rR^2} = \frac{1}{3M} \qquad \boxed{\text{光 } dr = 0} \quad \text{(F.8)}$$

である。シュッツ（参照図書を見よ）を言い替えると、(F.8) 式の第二式はブラックホールが回転している方向と同じ方向に送られる光を表している。第一の解が表していることは、遠方の記録係が記録すると、他の光のフラッシュ（「後方に」送られた光）が、全く動いていないことである。軌道の引きずりがあまりに強くなると、光は回転と反対方向に動くことができない。どんな物質粒子でも光よりもゆっくり運動しなければならない。したがって、角運動量がブラックホールの回転の反対方向にどんなに大きくても、ブラックホールと同じ方向に回転しなければならない。

質問 11　エルゴ球の中の光の引きずり。 エルゴ球の内側（$r_H < r < r_S$ となるような r）で、赤道面上の接方向のどちらの向きでもよいのだが、発光されたフラッシュは、遠方記録係が観測するとブラックホールの回転方向に運動することを示せ。つまり、初期の接方向の角速度 $d\phi/dt$ はいつでも正であることを示せ。

定常限界の存在により、277 ページの (F.4) 式の換算円周を測定することは原理的に困難になる。定義にしたがえば、赤道面における静止した同心環の周りの全距離を測定し、2π で割ることによって R は決まる。しかし、定常限界の内側で、環は静止したままでいることはできない。強力なロケットを噴射して止まろうとしても必然的に接方向に動いてしまう。したがって、現在のところ、定常限界の内側では R の現実的な定義は存在しない。F.9 節で、この原理的な困難を克服する。

後の結果を予想するために、ここで、カー計量の四番目の新しい性質に触れることにする。それを F.10 節と F.11 節でさらに詳しく調べる。

カー計量の第四の新しい特徴はエネルギーの利用である。 自転しないブラックホールから正味のエネルギーを取り出すことはできない（例外は、29 ページの量子「ホーキング輻射」である。星の質量程度のブラックホールでは無視できる）。そのため、自転しないブラックホールは「死んだ」と言われる。それに対して、自転するブラックホールから回転エネルギーが取り出せる。したがって「活きた」という名が使われる。F.12 節を見よ。

F.6 光の半径方向と接方向の運動

質問 12 光の半径方向の運動。 半径方向 ($d\phi = 0$) に運動している光 ($d\tau = 0$) に対して、計量から

$$\frac{dr}{dt} = \pm\left(1 - \frac{M}{r}\right)\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} \qquad \boxed{光\ d\phi = 0} \quad (F.9)$$

であることを示せ。この半径方向の速さが定常限界で 0 になることと、エルゴ球の内部で虚数（つまり現実的でない）となることを示せ。その意味：純粋な半径方向の運動はエルゴ球の中では不可能である。図 2 を見よ。

接方向に運動している（$dr = 0$）光（$d\tau = 0$）に対して、カー記録係が記録する接ベクトルを $Rd\phi/dt$ とする。(F.7) 式から、この接線方向の速度は

$$R\frac{d\phi}{dt} = \frac{2M^2}{rR} \pm \frac{2M^2}{rR}\left[1 + \frac{r^2R^2}{4M^4}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\right]^{1/2} \qquad \boxed{光\ dr = 0} \quad (F.10)$$

となる。(F.10) 式の右辺第二項は、分子の R^2 に (F.4) 式を代入することで簡単になる（我々を信用するか、自分の手で確かめよ）。(F.10) 式は

$$R\frac{d\phi}{dt} = \frac{2M^2}{rR} \pm \frac{r - M}{R} \qquad \boxed{光\ dr = 0} \quad (F.11)$$

となる。

質問 13 地平線での光のひきずり。 地平線で起きる光のひきずりとは何だ（(F.2) 式の正の符号と $a = M$ のときの r_H と質問 6 の R_H）。地平線で初期の接方向の光の回転率 $d\phi/dt$ はどちらの方向に向けてパルスが発光されようと一つの値になることを示せ。地平線でこの光の接方向の初期速度 $Rd\phi/dt$ を記録係が測定すると図 2 に示した値になっていることを示せ。

(F.9) 式と (F.11) 式にある半径方向と接線方向の光の速度はカー記録係が座標 r と ϕ, 遠方時間 t を使って計算した記録係速度である。カー記録係速度は誰も直接測定していない。ちょうど、自転しないブラックホール付近で記録係速度を誰も直接測っていないのと同じだ（第 3 章から第 5 章）。

図 2 に最大極限カー計量に対する光の半径方向と接方向の記録係速度を示した。これらのプロットがいろんな方向に広がっていくフラッシュ光の初期速度を表していることをもう一度確認しよう。発光した後に、半径方向に広がるフラッシュは横方向に引きずられるかもしれないし、接方向に進んでいるフラッシュは内側に曲げられるかもしれない。

質問 14　運動の固定（任意の問題）。ソーン（Kip Thorne）は「私はこれから述べることを保証しよう。自転するブラックホールの地平線近くにロボットを降ろして、どんなに強くエンジンを噴射しても、ブラックホールの自転速度以外の速さでは前後（どの接方向）にも動くことができないだろう」と書いている。(F.11) 式と図 2 のどこにこの証拠があるのか。「ホール自身のスピンの速さ」とは何か。(Kip S. Thorne, *Black Holes and Time Warps:Einstein's Outrageous Legacy,* W. W. Norton, New York, 1994, 57 ページ。)

F.7　大量の結果、最大極限カーブラックホール

さて、あなたはカー計量について全く知らないとしよう。そして誰かがあなたに「不明」の計量 (F.3) と R の定義を見せたとしよう：

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{4M^2}{r} dt d\phi - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{M}{r}\right)^2} - R^2 d\phi^2 \tag{F.3}$$

$$R^2 \equiv r^2 + M^2 + \frac{2M^3}{r} \tag{F.4}$$

するとつぶやくだろう「この式はおかしいのではないか。シュワルツシルトらしき計量だが、dr^2 の項の分母が変で、$dtd\phi$ の項もあり、$d\phi^2$ の係数が r^2 でなく R^2 になっている。それでもとりあえず計量の形はしている。それでは、シュワルツシルト計量のときにしたように、この計量で表される領域を運動する粒子について角運動量とエネルギーその他のものを求めてみよう」そして、極値的加齢の原理または第 2 章から第 5 章の中の別の方法を使い、これらの章の結果と同様の式を求め、表 F.1 の右に入れる。

注意： (1) 計算を赤道面に限っている。(2) 定常限界の外側では静止した球殻をつくることができる（赤道面の静止したリングに限っている)。しかし、(F.21) 式で $d\phi/d\tau = 0$ とすることで、静止リングは負の角運動量をもつことがわかる。よってリング構造を建設するとき、リングを静止させるために、初期の接方向のロケット噴射によって負の角運動量を与える必要がある（290 ページのボックスを見よ）。

質問 15　時間の定数としてのエネルギーと角運動量。 最大極限カーブラックホールの赤道面で運動する自由物体のエネルギーと角運動量、表 F.1 にある (F.19) 式と（F.21) 式を求めよ。

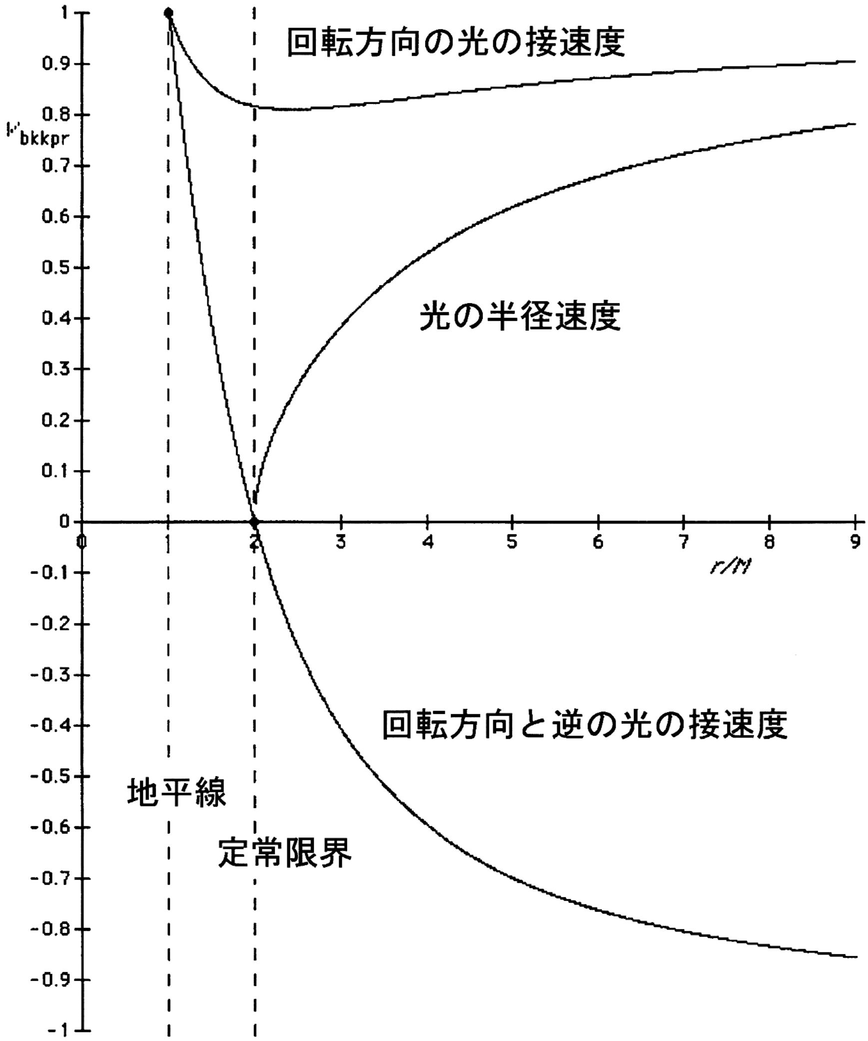


図 **F.2**　最大極限カーブラックホール $(a = J/M = M)$ 付近における光の半径方向と接方向の速度のコンピュータプロット。r/M が大きくなると、記録係速度はすべて ± 1 に近づくことに注意せよ。純粋な半径方向の運動は定常限界の内側では不可能であることにも注意せよ。重要：打ち上げられた直後、初期速度は光速である。打ち上げられた後、光は徐々に向きを変える。自転していないブラックホールの場合には **143** ページの図 **6** と **144** ページの 図 **7** を見よ。

表 F.1　自転しないブラックホールの極限自転ブラックホールの比較

量	自転しないシュワルツシルトブラックホール	極限スピンカーブラックホール（「球殻」=定常限界の外の静止リング）
r と R の定義	換算円周= $r \equiv \frac{(\text{球殻の円周})}{2\pi}$ (F.12)	換算円周 R. 定義は以下 $R^2 \equiv r^2 + M^2 + \frac{2M^3}{r}$ (F.1
球殻時間 vs. 遠方時間（重力赤方偏移）	$dt_{\text{shell}} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} dt$ (F.14)	$dt_{\text{shell}} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} dt$ (F.1
dr_{shell} vs. dr	$dr_{\text{shell}} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2} dr$ (F.16)	$dr_{\text{shell}} = \left(1 - \frac{M}{r}\right)^{-1} dr$ (F.1
エネルギー（運動の定数）	$\frac{E}{m} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\tau}$ (F.18)	$\frac{E}{m} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} + \frac{2M^2}{r} \frac{d\phi}{d\tau}$ (F.1
角運動量（運動の定数）	$\frac{L}{m} = r^2 \frac{d\phi}{d\tau}$ (F.20)	$\frac{L}{m} = R^2 \frac{d\phi}{d\tau} - \frac{2M^2}{r} \frac{dt}{d\tau}$ (F.2

F.8　落下：「まっすぐに螺旋運動」

自転しないブラックホールの近くで、最も単純な運動はまっすぐ落下することである（第 3 章）。自転するブラックホール付近で最も単純な運動は何か。同じように考えて、遠くで静止状態から落下し、その後、角運動量が 0 のまま落ちる石の運動を調べよう。

質問 16　角運動量ゼロ。でも角度方向への運動。角運動量（F.21）をゼロにし、次の式を確かめよ。

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{2M^2}{rR^2} \qquad \boxed{L=0} \quad \text{(F.22)}$$

(F.22) 式から、粒子の角運動量がゼロであるにもかかわらず、ブラックホールの周りを回るという面白い結果が得られる。これは、ブラックホールがその周りの時空を引きずるという我々の解釈の正しさの証拠となる。図 3 は角運動量ゼロで落下する運動の軌跡を示しており、以下で計算する。

まず、回転するブラックホールからずっと離れて静止した状態から出発し、角運動量ゼロで運動する石を表す方程式が設定できるかどうかを調べよう。遠方は平坦時空で、石のエネルギーは $E/m = 1$ であり、落下しても同じエネルギーを保っている。表 F.1 の

(F.19) 式から

$$\frac{E}{m} = 1 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\tau} + \frac{2M^2}{r}\frac{d\phi}{d\tau} \tag{F.23}$$

(F.22) 式と (F.23) 式は 4 つの未知の量 dr, dt, $d\tau$, $d\phi$ についての 2 つの方程式である。3 つ目の方程式は最大極限ブラックホールの計量 (F.3) である。3 つの独立な方程式で、4 つの未知数のうち 3 つを消去し、どの 2 つの微分量の間の関係でも求められるようにする。軌跡を表わすカー地図を描きたいので、2 つの量として、dr と $d\phi$ を選ぶ。繁雑だが、代数に悩まされてはいけない。R^2 の (F.4) 式に結果を代入し、dr と $d\phi$ の間の関係を求めると

$$dr = \frac{r-M}{r}\left[\frac{r^5}{2M^3} - \frac{r^4}{M^2} + \frac{r^3}{M} - r^2 + \frac{Mr}{2}\right]^{1/2} d\phi$$

$$= \frac{(r-M)^2}{r}\left[\frac{r^3}{2M^3} + \frac{r}{2M}\right]^{1/2} d\phi \qquad \boxed{L=0} \tag{F.24}$$

となる。

コンピュータは難なく、この式を積分してプロットすることができる。これを図 3 に示した。我々はカー記録係の角速度を使ったので、結果の図もカー記録係になる。記録係に

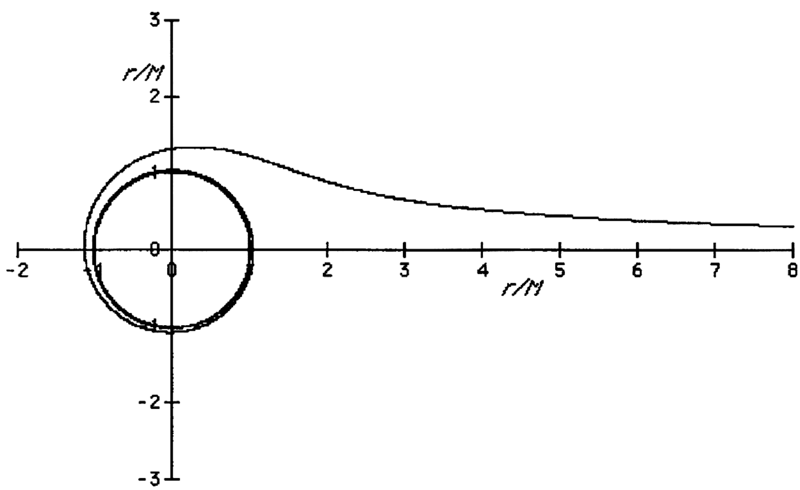


図 **F.3**　空間における石の軌跡のカー地図のコンピュータプロット。石はブラックホールから離れたところで静止状態から (したがって角運動量ゼロで) 落下する。遠方の記録係によると、石は $r = M$ の地平線に向かって螺旋運動し、そこで永遠に円運動する。

対して、角運動量 0 の石はブラックホールの周りで螺旋を描き、半径 $r = M$ の円軌道に近づき、永遠に円を描く。

質問 17　記録係による最終円軌道。この石が地平線に達すると、dr が 0 になる（つまり r が変化しない）ことを確かめよ。

シュワルツシルト記録係の記録によると、自転しないブラックホールでは、まっすぐに落下する物体は地平線に近づくにつれてゆっくりになることを思い出せ。自転する、および自転しないブラックホールに対して、$L = 0$ で落下する石は、遠方時間で測ると、決して地平線を横切らない。

質問 18「最後の一周」での記録係速度。推測せよ：無限遠から静止状態で落下し始めた石が地平線に達したとき、カー記録係の測る接線方向の速さ $Rd\phi/dt$ はいくらになるか。そして、その数値を求めるための公式を導け。推測は正しかったか。

無限遠から静止状態で落下する観測者は落下の感じ方が全く違う。地平線では止まらず、滑らかに中心へ進んで行く（カー計量ではすべての道が中心に通じると仮定する）。前式の変形の苦労をまた味わうと dr と $d\tau$ の関係が得られる。ここで $d\tau$ は落下者の腕時計時間の増分である：

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \frac{2Mr^3 - 4M^2r^2 + 4M^3r - 4M^4 + \dfrac{2M^5}{r}}{r^2(r-M)^2}$$

$$= \frac{2M}{r}\left(1 + \frac{M^2}{r^2}\right) \qquad \boxed{L=0} \quad \text{(F.25)}$$

図 4 はこの式の平方根の大きさとシュワルツシルトの場合で遠くから落下していく石の速度の大きさを比較したものである（109 ページの (3.32) 式）：

$$\frac{dr}{d\tau} = -\left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2} \qquad \boxed{L=0 \text{ シュワルツシルト}} \quad \text{(F.26)}$$

(F.25) 式と (F.26) 式はともに、小さい半径の領域では記録係速度の半径成分が 1 よりも大きいことを表している。自転するブラックホールに落ちて行く観測者に強いる接方向の運動を加えると、その結果の速さはかなり印象的になる（図 3)。このような運動は、光の速さが 1 であるという「宇宙の速度制限」を破っているのではないのか？ 同じような疑問を 131 ページのプロジェクト B の「ブラックホールの内側」B.3 節で討論した。

研究ノート：地平線の内側に適用すると、(F.26) 式は、カー計量が最大極限カーブラックホールの中心までずっと時空を正しく記述できていると仮定している。正しくないかも知れない。130 ページのボックス「泡立て器時空」を見よ。

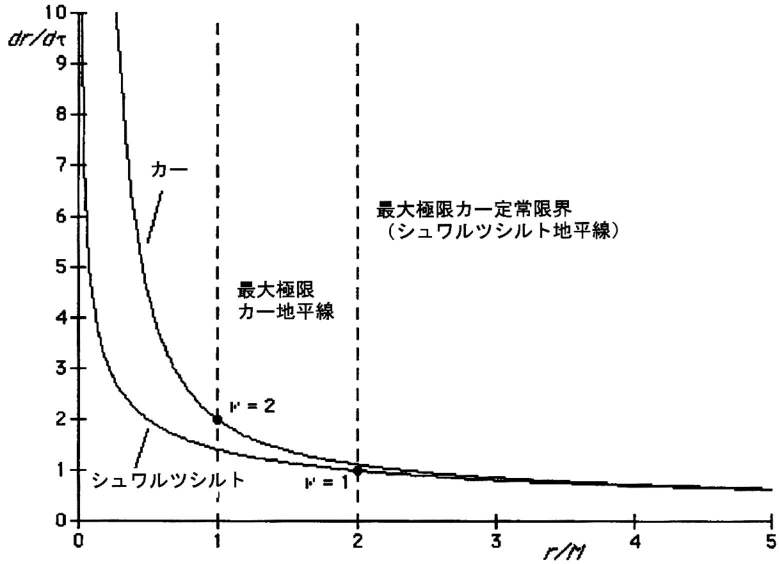


図 **F.4** コンピュータプロット：遠方で静止状態（つまり $L = 0$）から落ち込む落下者が経験する落下速度の半径成分について、シュワルツシルトブラックホールと最大極限カーブラックホールの比較。

F.9 リングライダー

284 ページの (F.22) 式によって角運動量 0 で落下する石の角度回転率 ω を表す：

$$\frac{d\phi}{dt} \equiv \omega = \frac{2M^2}{rR^2} \qquad \boxed{L = 0} \qquad \text{(F.27)}$$

この式の ω は空間が自転するブラックホールによって「押される」角速度をある程度表している。この式の角速度 ω で接方向に「流れとともに進む」と、何が起きるか。ゼロ角運動量になるように正しく回転していることをどうやって保証するのか。定常限界で何が起きるのか。

この考えを追究するために、ブラックホールに対して同心的で赤道面にあるリングの集合を思い浮かべる（図 5)。これらのうちどのリングも、カー記録係によって計算される (F.27) 式の角速度で回転している。r の値の違うリングはそれぞれ違った角速度で回転している。

こうして構成された結果は、我々がここで**リングライダー**と呼ぶ赤道面上の観測者の集合になる。リングライダーは角運動量ゼロの回転リングに静止して立っている観測者のこ

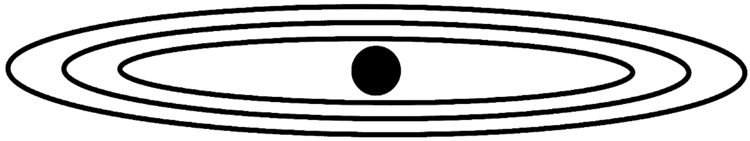


図 F.5　回転するブラックホールを取り巻くリングのカー地図（鳥瞰的プロット）。リングはブラックホールと同じ方向に回転するが、287 ページの (F.27) 式にあるように、リングによって角速度は違う。

とを言う。以前ではリングライダーは**局所非回転観測者**（locally nonrotating observer）と呼ばれていたのだが、現在の呼び慣らされた名前は**ゼロ角運動量観測者**（zero angular momentum observers）または **ZAMOs** と言う。リングライダーは各々、シュワルツシルト幾何学の球殻観測者のように、ブラックホールの中心に向いた重力加速度を受ける。リングライダー、球殻観測者ともに、地平線で半径方向内向きの重力加速度は無限大になり、円を描くどんなリング構造も地平線の内側で破壊される。リングライダーの測定によると、光の速さは 1 となり、これから示すように、接方向ではどちらの向きでも同じ速さになる。

質問 19　リングのすべり。内側のリングの角速度は、ずっと外のリングと比べて大きいか小さいか。その選択の正当性を述べよ。

質問 20　記録係にしたがったリングの速さ。(F.27) 式の ω の単位は何か。$r = 100M, r = 10M, r = 2M, r = M$ の各々の場合に、記録係速さ $R\omega$ の数値はいくらか。光速との比として答えよ。

質問 21　雨は垂直に落下するのか。遠いところから止まった状態で落下した石がゼロ角運動量リングのライダーを垂直に通り過ぎるかどうか議論をせよ。推測：もし石が遠いところからまっすぐに投げ入れられても同じことが言えるか。推測：光ならどうか。

ゼロ角運動量のリング上で、リングライダーに対して単純化した計量を書くことができるか。半径方向に離れた事象についてはたぶんできないだろう。隣合うリング間で滑べり合い、歪むためだ。よってリングの接方向に離れている事象に注意を向けよう。遠方の観測者によれば、リングは各々 (F.27) 式の角速度 ω で回転している。ゼロと記したところからリングに沿って測った角度を方位角の増加 $d\phi_{\text{ring}}$ と定義する。リングに沿って物体を一様に動かそう。カー記録係が観測すると、物体の全角速度 $d\phi/dt$ はリングに対する角速度 $d\phi_{\text{ring}}/dt$ にリングの記録係角速度 ω を加えたものになる。または

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi_{\text{ring}}}{dt} + \omega \tag{F.28}$$

$d\phi$ と $d\phi_{\text{ring}}$ ともに正の方向はブラックホールの回転の方向である。

それでは、リングに沿って角度 $d\phi_{\text{ring}}$ 離れ、遠方時刻で dt の差のある 2 つの事象を考

えよう。遠方観測者に対して 2 つの事象間の角度差 $d\phi$ は、(F.27) 式と (F.28) 式から

$$d\phi = d\phi_{\rm ring} + \frac{2M^2}{rR^2}dt \qquad \boxed{dr=0} \quad \text{(F.29)}$$

である。リングに沿った運動という同じ制限（$dr = 0$）を計量 (F.3) につけると

$$d\tau^2 = \left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{4M^2}{r}dt d\phi - R^2 d\phi^2 \qquad \boxed{dr=0} \quad \text{(F.30)}$$

となる。

質問 22 リングの新しい計量。(F.29) 式を (F.30) 式に代入せよ。まず $dt d\phi_{\rm ring}$ の係数が 0 になることを示せ。次に dt^2 と $d\phi^2_{\rm ring}$ の項をまとめて、リングに沿った運動の計量が (F.31) 式で与えられることを示せ。ヒント：共通の分母 r^2R^2 で集めて、分子に R^2 （(F.4) 式）を代入せよ。

$$d\tau^2 = \frac{r^2}{R^2}\left(1-\frac{M}{r}\right)^2 dt^2 - R^2 d\phi^2_{\rm ring} \qquad \boxed{dr=0} \quad \text{(F.31)}$$

質問 23 リングライダー時計の時間。リングライダーが（角運動量ゼロ）リング上で静止している。その時計の時間間隔 $dt_{\rm ring}$ と遠方時計の時間間隔 dt が

$$dt_{\rm ring} = \frac{r-M}{R}dt \qquad \boxed{dr = d\phi_{\rm ring} = 0} \quad \text{(F.32)}$$

によって関係づけられることを示せ。これを代入することにより、 $dr = 0$ の計量が

$$d\tau^2 = dt^2_{\rm ring} - R^2 d\phi^2_{\rm ring} \qquad \boxed{dr=0} \quad \text{(F.33)}$$

となることを示せ。

要するに、リング上で互いに近い事象に対して計量 (F.33) は平坦時空のようにみえる。しかし、時空は自転するブラックホール近くで平坦ではない。(F.33) 式は、時間と空間を制限して、半径方向の「局所重力」が無視できる事象を分析するだけの有効な局所系を記述している。しかしこの式は、同じリングに沿って互いに近くで起きる事象を分析するときには便利である。

これでやっと（ついに）地平線の外のどこでも換算円周 R を定義することができる。定常限界の内側さえでもだ。リングライダーはリングの円周を測定し、2π で割る。

$$(\text{自由に回転するリングの円周}) \equiv 2\pi R \qquad \text{(F.34)}$$

この結果は、このゼロ角運動量リングに対する**換算円周**の正式な定義となる。誰でも使えるように、(F.4) 式の r の値とともに、回転する各リングに R の値をつける。すでに測られた回転リングと一致する静止リングに R と r の同じ値がつけられる（もちろん、回転していないリングは定常限界の外側でのみ存在できる）。

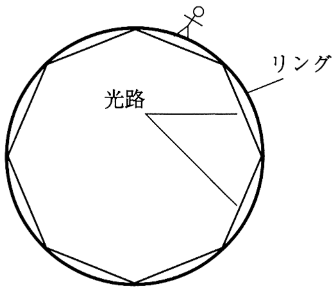


図 F.6 回転するゼロ角運動量リングの内側を銀メッキすると、リングに沿って光のフラッシュの信号を送ることができる。直線で表した光路の区間は曲げられるだろう。各区間をいくらでも短くでき、光はリングをかすめていると仮定している。リングの周りを逆方向に光が伝わっても同じ時間がかかれば、リングの角運動量が 0 であることを確かめたことになる ((F.27) 式と質問 24)。局所的に測られる光の信号の速さが $v_{\text{ring}} = 1$ であると、リング周りの時計を合わせることができる。

回転リングの集合は地平線から無限遠の半径まで広げることができる。リング上で互いに近い 1 組の事象の固有距離は

$$d\sigma = R d\phi_{\text{ring}} \qquad \boxed{dr = dt = 0} \quad \text{(F.35)}$$

である。

質問 24 リングに沿って進む光の速さはリングライダーに対して 1 になる。リングライダーが測ると、リングに沿う光の速さが 1 になることを計量 (F.33) から示せ。この速さはリングのどちら向きの光に対しても同じか (図 6)。

質問 25 リングに沿った運動は自由なのかそれとも固定されているのか。よく考えなければ解けない問題；任意。(F.33) 式からわかることだが、すべてのリングライダーはリングに沿った運動を調べるために特殊相対論を使うことができる。よって、リングに沿って前後に自由に運動ができなければならない。それが地平線の近くであっても。それに対して、質問 14 では、地平線近くの接方向の運動はブラックホールの回転に堅く固定されることになっている。固定なのか、自由なのか。どっちなのか。

暴風のない竜巻

どんな意味で自転するブラックホールの近くの時空が「竜巻のように回る」のか。自転するブラックホールの近くで時空の回転を感じることができるか。

比較のため、竜巻の風が吹き付けているとき、あなたは地上に立っていようとしている。そう考えよう。竜巻の風によって接線方向に流されないように風に向かって体を傾けるか、固定されたものや丈夫なものにしがみつかなければならない。立ったままでいると、風が吹く方向に力を感じる。

次に、あなたは、自転ブラックホールを同心とする静止リング上に止まって立っているとしよう。「静止」と「止まって」という言葉は、遠い星が頭上で動かないことを意味する（このような静止リングは定常限界の外側でのみ建設することが可能である）。地上の竜巻に抵抗している間に感じた下向きの「重力」と同じ種類の力をリング上であなたは経験する。しかし、渦巻く時空による接線方向の「竜巻力」はあるのだろうか。竜巻力とはブラックホールの回転方向に押す「力」のことである。この本の初めの数刷では「そうだ」と答えた。しかし、我々は誤っていた。ブラックホールの中心を同心とする静止リング上で立っていても、接線方向の力を感じない。

我々は竜巻を例として考えたことにより、間違えてしまった。地上の竜巻と自転するブラックホール時空の差を理解する切掛けとするため、以下のグラフを見よう。定常限界で自転するブラックホールの外側で静止する物体の角運動量を半径の関数としてプロットしたものである（このボックスの最後の式）。止まっている物体に対して角運動量は負であることに気をつけよう。鍵となる考え：静止している物体はその半径にふさわしい角運動量をもち、この角運動量を維持するためには接線方向の力は必要ない。状況は地球を回る円軌道上の石と似ている。石は接線方向に力を感じておらず、一定の角運動量で軌道運動を続けるために、このような力は必要ない。地球を軌道運動する石と自転するブラックホールの外で静止するリングで立っている人の差は、人は立っていても（負の）角運動量を持っているということだ。

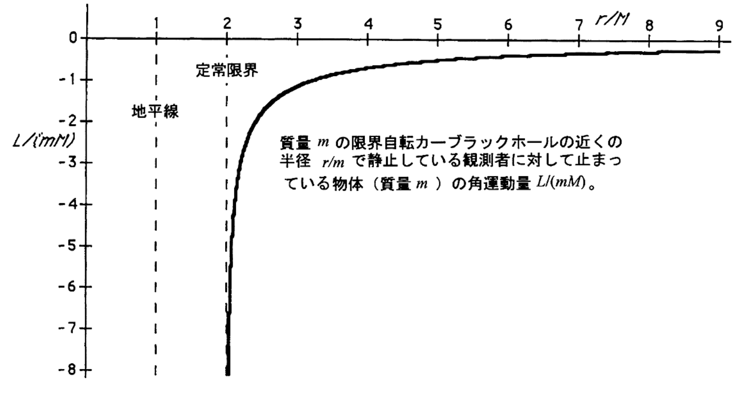
だから、静止リング上で立つためには、接線方向の力は必要ない。

以下のグラフでも、静止観測者は別々の半径で別々の角運動量の値を持っていることを示している（この分析では、静止観測者の頭と足の間の角運動量は無視している）。横に動かずに半径を変えるためには、角運動量を変えなければならない。角運動量を変えるためには接線方向の力が確かに必要ではあるが、半径を変えるほんの一時的なものである。例えば、遠方の星へまっすぐ半径方向に伸びた線があり、それに伝わって遠くから降りて行くとしよう。この線に沿って下に降りていくと、（負の）角運動量の大きさは増加しなければならない。横に流されることなく、固定された半径方向に伸びた道にい続けるためには、接線方向にロケット噴射をして角運動量を変えなければならない。だが、内側に進み続けるしばらくの間だけである。静止リングに足をつけるなどして、一度降りるのを止めてしまえば、横の力は存在せず、位置を維持するための接方向のロケット噴射は必要なくなる。

線に沿って降りていくとき、負の角運動量はどれくらい増加しなければならないか。答えは 284 ページの (F.21) 式で $d\phi/d\tau = 0$ としたものから得られる。静止物体に対して、$d\tau = dt_{\mathrm{shell}}$ である。同じページの (F.15) 式を使って (F.21) 式から $dt/d\tau = dt/dt_{\mathrm{shell}}$ を消去し、M で割ると、

$$\frac{L}{mM} = -\frac{2M}{r}\frac{dt}{d\tau} = -\frac{2M}{r}\frac{dt}{dt_{\mathrm{shell}}} = -\frac{2M}{r}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1/2} \tag{F.36}$$

が得られる。以下の図は静止物体の $L/(mM)$ を r/M の関数としてプロットしたものである。$r/M = 2$ の定常限界に降りると、（負の）角運動量の大きさが際限なく増加するという結果に気づいてほしい。



F.10 負のエネルギー：ペンローズ過程

ペンローズ（Roger Penrose）は自転するブラックホールからエネルギーを引き出す計画を考案した。この計画は**ペンローズ過程**と呼ばれる（参照論文を見よ）。ペンローズ過程は、エルゴ球の内側の軌道上で粒子の全エネルギーが負になることができるという予測に基づいている。ペンローズ過程を詳しく調べる前に、負の全エネルギーについて述べる必要がある。

負の全エネルギー　負の全エネルギーはどんな意味を持ち得るのだろうか。負のエネルギーは特に新しいものではない。ニュートン力学で、太陽から遠く離れたところで静止している粒子のポテンシャルエネルギーをふつう慣例として 0 とする。すると、太陽付近で静止している粒子の運動エネルギーは 0 でポテンシャルエネルギーは 0 より小さくなり、全エネルギーは負になる。しかし、ニュートン力学では、位置エネルギーのゼロ点はどこに選んでもよく、選び方を変えても運動の記述は変わらない。それに対して、特殊相対論では平坦時空における自由物質粒子の静止エネルギーを質量と等しくすることによってエネルギーの基準を決める。よってエネルギーのゼロ点の選び方から任意性は失われ、重力中心から離れた粒子のエネルギーは常に正の値になる。

シュワルツシルト幾何学では、物理系はニュートン力学のものとは違う。自転していないブラックホールの地平線近くで静止している粒子の全エネルギーは 0 である（98 ページの例題 1 の (3.18) 式）。その意味は何だろうか。この粒子をブラックホールから離れたところ（そこでのエネルギーは m）で静止させるために必要なエネルギーは静止エネルギー（$= m$）に等しいということだ。結果として、地平線近くで静止した位置からブラックホールに粒子が落ちても、ブラックホールと粒子系の質量は（97 ページの図 4、遠方の観測者が測ると）変わらない。

カー幾何学の物理系はシュワルツシルト幾何学のものとは違う。粒子のエネルギーは自転するブラックホール付近で負の値をとることができる。その意味は何だろうか。このような粒子を動かしてブラックホールから離れたところに静止させるためには、静止エネルギーよりも大きいエネルギー（m より大きい）が必要となる。もし負のエネルギーを持った粒子が自転するブラックホールに捕まればブラックホールの質量と角運動量は減少する（F.11 節を見よ）。この過程はブラックホールの角運動量が 0 になるまで繰り返すことができる。そして「死んだ」シュワルツシルトブラックホールになり、ホーキング輻射としてのみエネルギーを取り出すことができる（29 ページのボックス）。

ペンローズ過程の計画　ペンローズ過程の計画は非倫理的な会計取引に似ている。

a. あなたと私でお金を共有することを決める。正味の財産は黒字（正）になっている。
b. 私はあなたに自分のお金をすべて与え、銀行からお金を借り、それも同じくあなたに渡す。私は賃貸対照表では赤字（負）になっている。そして今現在、私の正味の

財産は赤字（負）である。

c. 私は破産を宣言し、銀行は借金を押しつけられる。

正味の結果として、私と銀行のお金はあなたに渡った。私が正味の負の財産の状態に陥るという仕組みを銀行は持っている。

ペンローズ過程は同じように

a. 遠い半径から出発して、あなたと私はいっしょにエルゴ球の内側の位置へ降りてくる。
b. 我々はいっしょにエルゴ球の内側で回転方向に運動している。あなたが私を回転の逆方向に、暴力的に押しやる。あなたは新しい軌道に移り、私は負のエネルギーの状態になる。
c. 私はブラックホールに落ち込み、ブラックホールは負のエネルギーを押しつけられる。あなたは新しい軌道に移り、増大したエネルギーとともに遠くへたどり着く。

正味の結果、私とブラックホールからあなたへエネルギーが移動したことになる。自転するブラックホールを使うと私が負のエネルギー状態になれる仕組みをつくれる。

全体的な計画は、自転するブラックホールの周りで物体が負のエネルギー状態になれるという仮定のもとに成り立っている。この仮定は正しいのだろうか。最大極限カーブラックホール近くの石のエネルギー (F.19) をもう一度見てみよう。

$$\frac{E}{m} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{d\tau} + \frac{2M^2}{r}\frac{d\phi}{d\tau} \tag{F.19}$$

このエネルギーは負になれるのか。エネルギーが 0 という「臨界的な」条件を見つけることでこの質問に答えることにしよう。

質問 26 ゼロエネルギーの条件。(F.19) 式で $E/m = 0$ とし、記録係が測る角度の変化率が

$$\left(\frac{d\phi}{dt}\right)_{E=0} = \frac{2M - r}{2M^2} \tag{F.36}$$

となることを示せ。どんな条件のもとで、角速度が負になったり正になったりするのか。

質問 27 ゼロエネルギーの記録係接速度。ここで運動が接線方向であると仮定し、記録係速度が

$$v_{\mathrm{bkkpr}\,E=0} = R\left(\frac{d\phi}{dt}\right)_{E=0} = \frac{R(2M - r)}{2M^2} \qquad \boxed{dr = 0} \tag{F.37}$$

となることを示せ。

質問 28 負のエネルギーに対する記録係接速度。ここで、粒子エネルギーが負であるという状況で分析を繰り返せ。条件が

$$v_{\mathrm{bkkpr}\,E<0} < \frac{R(2M - r)}{2M^2} \qquad \boxed{dr = 0} \tag{F.38}$$

であることを示せ。

図 7 は、図 2 の光の正と負の接方向速度のプロットとともに (F.37) 式のプロットを表している。どんな粒子の接線運動も光の接線方向の運動曲線によって制限される（遠方の記録係にしたがうと、エルゴ球の内側では負の接方向に運動する光でさえも回転方向を向いて進まなければならない）。それに加え、(F.38) 式から、負のエネルギーの粒子の接方向の速度は図 7 の太い線より下になければならない。この図の影のついた部分はこれらの条件を満たしており、負のエネルギーをもつ石の記録係接線速度の領域を示している。次に記録係から離れて、リングライダーの測定に移ろう（質問 29）。

新しい物理の本質

> 私の物理学の人生で出会ったものの中で、魅力という点でブラックホールに勝るものはない。そして思うに、我が家と考えているこの宇宙でブラックホールほど重要な構成物も存在しない。ブラックホールは一般相対論によって形作られた革命の典型となっている。ブラックホールは特殊相対論（静的な「平坦」時空の物理）およびそれ以前のニュートン力学から切り離された一般相対論（曲がった時空の力学）の性質の極端な側面に光を当て、そして限界へのテストとなる。時空曲率。物理の分野としての幾何学。重力波。これらはすべてブラックホールにあり、古い物理の小さな補正でなく、新しい物理の本質である。
>
> —ホイーラー（John Archibald Wheeler）

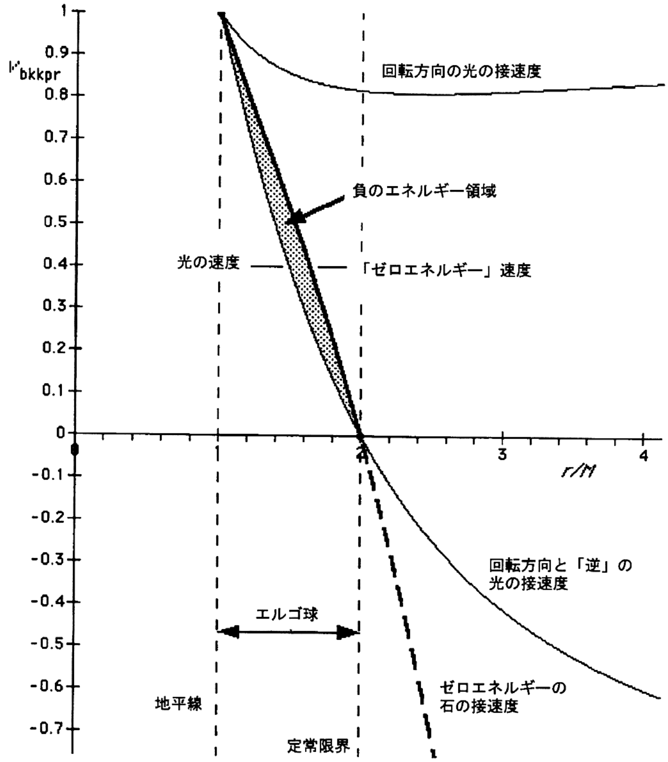


図 **F.7** 光の接方向の記録係速度（細い線）とエネルギーがゼロの石の接方向の速度（太い線）を表すコンピュータプロット。**(F.37)** 式を使って計算している。定常限界（$2M$）より大きな r で、粒子はゼロエネルギー（または負のエネルギー）になることができない。エルゴ球の内側でのみ、臨界接速度が可能である。影のついた部分は、石が負のエネルギーをとる記録係速度の領域を表す。

質問 29 ゼロエネルギーのリングライダー速度。（任意の問題。計算がかなりやっかい）石が回転リングの接方向に運動している。リング速度 v_{ring} をどのようにすれば、無限遠で測られるエネルギーが負になるのだろうか。(F.19) 式で $E/m = 0$ とし、(F.29) 式と (F.32) 式を代入して、変数を $d\phi_{\text{ring}}$ と dt_{ring} に変えよ。(F.4) 式を使って簡単にし

$$v_{\text{ring},\,E=0} = R\frac{d\phi_{\text{ring}}}{dt_{\text{ring}}} = -\frac{1}{2}\left(\frac{r}{M} - 1\right)\frac{r}{M} \tag{F.39}$$

となることを示せ。

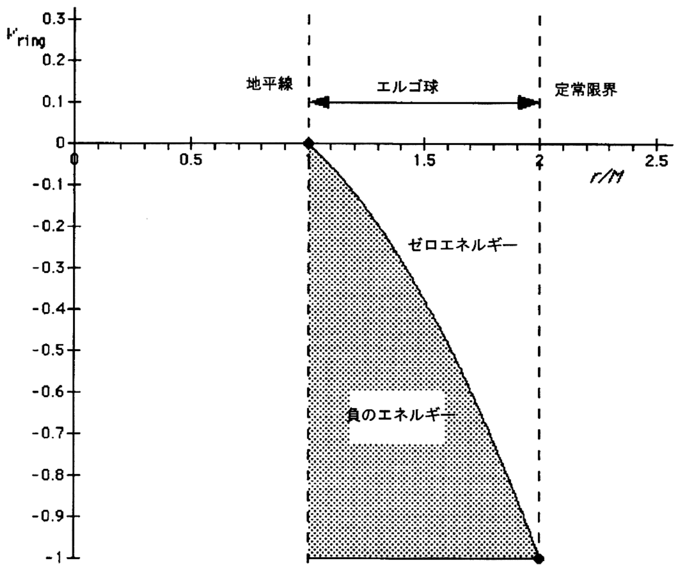


図 F.8　無限遠で測ったとき、エネルギーが負になるリング速度の範囲（影のある領域）を示すコンピュータプロット。負のリング速度は、ブラックホールの回転の方向と逆の方向へリングに沿って運動することを示している。

図 8 にリング速度の (F.39) 式をプロットした。影の領域のリング速度に対して、無限遠で測ったエネルギー E/m は負になる。リングのエネルギーが負になる領域はリングの半径に依存する。極端な場合の方が興味深い。定常限界のリングが光の速度でリングに沿って後に戻ると、エネルギーがゼロになる。それに対して、地平線近くのリングはどんな後退リング速度でも、それがどんなに小さくても負のエネルギーになる。

F.11　クエーサーパワー

回転するブラックホールからどれくらいのエネルギーが取り出せるのだろうか。一般相対論では、エネルギーは境目のない統一体である。つまり回転する物体の静止エネルギーから運動エネルギーを分離することができない。回転するブラックホールからエネルギーを取り出すことは、角運動量 J とともに質量を変えることである。回転するブラックホールから角運動量がすべて取り出されたとき、残った最も小さい質量を、いわゆる**既約質量** $M_{\rm irr}$ と同定する。角運動量パラメータ $a = J/M$ をもち帯電せず自転するブラッ

クホールの既約質量 M_{irr} は

$$M_{\mathrm{irr}}^2 = \frac{1}{2}\left[M^2 + M(M^2 - a^2)^{1/2}\right] \tag{F.40}$$

または

$$M^2 = M_{\mathrm{irr}}^2 + \frac{J^2}{4M_{\mathrm{irr}}^2} \tag{F.41}$$

である（Wald, 326 ページ。Misner, Thorne and Wheeler, 913 ページにある）。この結果を 19 歳のプリンストンの大学院生でアテネ人のクリストドーロー（Demetrios Christodoulou）が発見した。彼は高校を卒業していなかった。

最終状態は質量 M_{irr} をもつ自転しないシュワルツシルトブラックホールである。正味の結果として、全エネルギー $M - M_{\mathrm{irr}}$ が帯電せず回転しているブラックホールから引き出せる。

質問 30　最大極限カーの既約質量。 質量 M の帯電していない最大極限カーブラックホールの既約質量はいくらか。**先進の文明**（自然の法則によって禁止されないあらゆる高度な工学的技術を持っている文明として定義できる）では最大極限カーブラックホールの質量 M の何倍がエネルギーとして引き出せるか。

質問 31　我々の銀河の怪物（モンスター）からどれくらいのエネルギーが取り出せるか。 我々の銀河中心に存在すると思われている質量 $M = 2.6 \times 10^6 M_{\mathrm{Sun}}$ のブラックホールが最大極限ブラックホールであると想像せよ。そこからどれくらいの全エネルギーが取り出せるか。答えを太陽質量 M_{Sun} の何倍かで答えよ。

クエーサーはどこからエネルギーを得ているのだろうか（274 ページのボックス）。おそらく、直接ペンローズ過程からではないだろう（F.10 節）。これまでの一連の理論では、クエーサーからの輻射は、降着円盤上で軌道回転しながらブラックホールに向かって落ちる物質の重力エネルギーから生じている。この物質は円盤中の他の物質と、複雑な未知の過程で相互作用している。円盤の中の破片が中心に落ちると、磁場による圧縮によって熱せられ膨大な輻射を発生する。重力エネルギーが高い効率（地上での核反応と比べて高い）で輻射に変換される。螺旋状に落ちるガスと雲の角運動量にもよるが、ブラックホールの角運動量が実際にこの過程で増加するかもしれない。ブラックホールそれ自身の回転エネルギーからクエーサの出力を捻出しているという理論もある。ブラックホールの回転エネルギーと地平線の外を回る物質を結びつけるために磁力線を使っている。このようなモデルではブラックホールの回転率が減る。

質問 32　クエーサー出力。クエーサーから毎秒どのくらいのエネルギーが出ているか。クエーサーは我々の銀河の 100 倍の割合でエネルギーを放出している。我々の銀河には太陽と似た星がほぼ 10^{11} 個ある。（訳注：星は 10^9 個程度。ダークマターを入れた銀河の質量が $10^{11} M_{\mathrm{Sun}}$ である。）太陽は毎秒どのくらいのエネルギーを放出しているのだろうか。太陽の光のエネルギーは地球の大気の外側に 1 平方メートル当たり 1370 ワット（**太陽定数**と呼ばれる）降り注いでいる。太陽定数から、太陽のエネルギー発生率をワットで求めよ。そして我々の銀河についても求め、その次にクエーサーについても求めよ。クエーサーは我々の銀河の 100 倍のエネルギーを放出している。これによれば、エネルギーで（地球の）1 年当たり太陽質量の何倍が変換されていることになるか。

クエーサーによる輻射生成過程の詳細は複雑かもしれないが、このプロジェクトの分析をすると、このような過程に対して発生可能なエネルギーを評価するための基礎を理解することができる。

降着円盤の各部分が局所リングと同じ回転率で回る（リングとともに回ると、粒子は安定円軌道に乗らないため、現実的な仮定ではない）と仮定せよ。小さなかけらが内側に動くと、十分なエネルギーが放出され、局所リングに対して静止する。リング上のかけらに対して、腕時計時間間隔 $d\tau$ はリング時計時間間隔 dt_{ring} と同じである。相対的に静止しているからである。このかけらのエネルギーの式 (F.19) は

$$\frac{E}{m} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{dt}{dt_{\mathrm{ring}}} + \frac{2M^2}{r}\frac{d\phi}{dt_{\mathrm{ring}}} \tag{F.42}$$

となる。

リング時間の増分と記録係の増分の関係は (F.32) 式によって与えられる：

$$dt_{\mathrm{ring}} = \frac{r-M}{R}dt \tag{F.32}$$

質問 33　リング上における石のエネルギー。(F.32) 式を (F.42) 式に代入し、$d\phi/dt$ に対して (F.27) 式を使い、共通の分母 $R(r-M)$ についてまとめると

$$\frac{E}{m} = \frac{\left(1 - \dfrac{2M}{r}\right)R^2 + \dfrac{4M^4}{r^2}}{R(r-M)} \qquad \boxed{\text{リング上で}} \tag{F.43}$$

となることを示せ。

分子の R^2（だけ）に (F.4) 式を代入しリング上の石に対して

$$\frac{E}{m} = \frac{r-M}{R} \qquad \boxed{\text{リング上で}} \tag{F.44}$$

であることを示せ。

(F.44) 式は簡単な式であるが、計算しようとするとなかなかやっかいだ。R が r の関数だからである（(F.4) 式と (F.13) 式）しかし、コンピュータにとってこれらの計算は何でもない。図 9 に結果をプロットした。

質問 34　光輝く生ゴミ。物体の塊がブラックホールから遠く離れた距離で静止した状態から落ち始め徐々に降りて行き、各局所リングで静止し、エネルギーの変化分を輻射として放出する。ここで、この物体が定常限界である $r = 2M$ のリングに降りる。図 9 から、物体が遠くに放出したエネルギーを静止エネルギーとの比として求めよ。原理的に、ブラックホールの地平線を越えて消える前に放出できるエネルギーの最大値はもともとの静止エネルギーに対する割合で答えるといくらか。

図 9 はクエーサーの輻射率の正しい評価とはなっていない。リングは降着円盤と同じ割合で回転しないし、降着円盤それ自身は輻射を完全には放出しきっていない。地平線を越える前に、螺旋運動する粒子の静止エネルギーのほんの数パーセントが輻射の形で放出されるだけかもしれない。それでも、その数パーセントが地上で起きる核反応の効率よりもずっと大きい。

F.12　「実用的な」ペンローズ過程

F.10 節と F.11 節の結果を使って、「実用的な」ペンローズ過程を考案する。それによって最大極限で自転するブラックホールからエネルギーを取り出すことができる。実際には、この過程は、自然の法則で禁じられていないあらゆる高度な工学的技術を持っている先進の文明にだけ実用可能である。計画の概要：等しい量の物質と反物質（例えば、液体ポジトロニウムとして集まっているポジトロニウム分子に結合している陽電子と電子）を最大極限カーブラックホールの地平線のちょうど外側で回転するリングまで降ろす。そこで物質と反物質が結合し（対消滅）互いに逆に運動する 2 つの電磁波パルスが発生する。一つは負のエネルギーを持ちブラックホールに落ち込む。もう一つは正のエネルギーをもち、遠くの観測者のところまで飛んで行き、実用的な目的にそのエネルギーを使える。それでは詳しくみてみよう。

回転リングに沿って動く粒子について (F.44) 式を一般化すると

$$\frac{E}{E_{\text{ring}}} = \frac{r-M}{R} + \frac{2M^2}{rR} v_{\text{ring}} \qquad \text{(F.45)}$$

となる。ここで、$v_{\text{ring}} = R d\phi_{\text{ring}}/dt_{\text{ring}}$ である。(F.45) 式は (F.19) 式と (F.29) 式、(F.32) 式から計算用紙の山を作り、(F.4) 式を使って整理するとやっと得られる。それに加えて、(F.45) 式の導出では以下の特殊相対論の結果を使う：

$$E_{\text{ring}} = m\gamma_{\text{ring}} \qquad \boxed{\text{特殊相対論}} \quad \text{(F.46)}$$

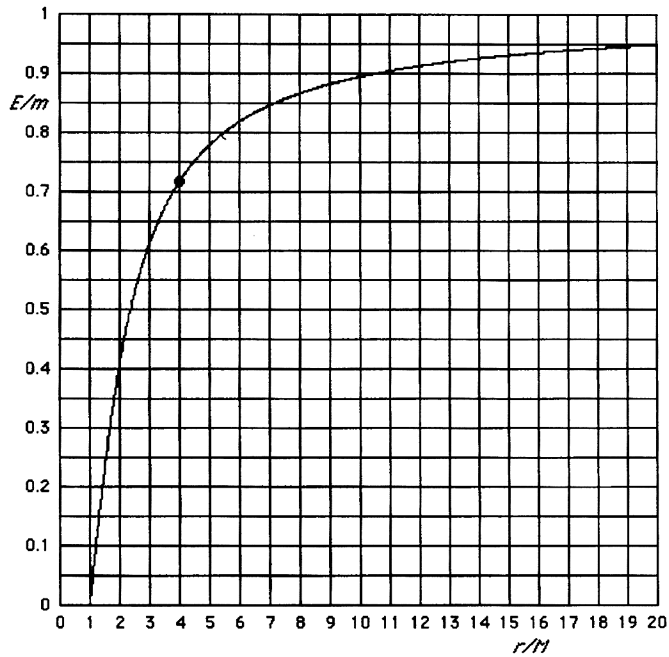


図 F.9 図中のドットの例では、$r = 4M$ のリング上で止まっている石の全エネルギーは無限遠で測ると $E = 0.72m$ になる。$r = 4M$ のリング上で止まっている石の全エネルギーは無限遠で測ると $E = 0.72m$ である。

ここで

$$\gamma_{\text{ring}} \equiv \frac{1}{(1 - v_{\text{ring}}^2)^{1/2}} \qquad \boxed{\text{特殊相対論}} \quad \text{(F.47)}$$

である。最後に特殊相対論からの変換（時間の伸び）から

$$dt_{\text{ring}} = \gamma_{\text{ring}} d\tau \qquad \boxed{\text{特殊相対論}} \quad \text{(F.48)}$$

ここで $d\tau$ はリングに沿って運動する石の腕時計時間である。

(F.45) 式の v_{ring} がリングに沿った方向に応じて正にも負にもなれるということに気をつける。状況によって粒子が負のエネルギーになる。

それでは単純化した状況に適用しよう。まず (F.46) 式の $E_{\text{ring}} = m\gamma_{\text{ring}}$ の値を一定に保ったまま、m を 0 にし、v_{ring} を $+1$ または -1 にしよう。その結果、粒子は電磁波パルスになる。

次に、極端な場合として、地平線に非常に近い回転リングに (F.45) 式を使え。言い替

えれば、$r \to M$ と $R \to 2M$ とする。(F.45) 式は

$$\frac{E}{E_{\text{ring}}} = \pm 1 \qquad \boxed{r \to M \text{ になるにつれてリング沿って運動する光のフラッシュ}} \qquad \text{(F.49)}$$

になる。これらの式を使うと、これから述べるように、ブラックホールからエネルギーを取り出すための理想的な方法を検討することができる。質量 m の物質と同じ質量 m の反物質から始めよう。全質量は $2m$ である。

第一段階 質量 $2m$ の積載物を最大極限カーブラックホールの地平線近くにあるゼロ角運動量リング上の位置に静止したまま置く。そのリング上で静止状態からその下のリングに移動させて静止させる。このように次々に移動させることでエネルギーを取り出す。

> **質問 35 第一段階で引き出されるエネルギー。**第一段階が完了したとき、遠い位置で使えるようなエネルギーはどれほどになるか。

第二段階 物質と反物質を地平線近くのリングに対して静止させたまま結合させ、発生した光のパルスをリングの回転に沿って互いに逆方向に向ける。

> **質問 36 光の接方向のエネルギー。**第二段階が完了した直後、リングに沿った二つのパルスの各々のリングエネルギー E_{ring} は、リングライダーが局所的に測定するといくらになるか。これらのフラッシュそれぞれについて無限遠で測ったエネルギー E はいくらか。

負のエネルギーのフラッシュ光は地平線を越えてブラックホールへと落ち込んで行く。したがって自転するブラックホールの角運動量（そして質量）は減る。それに対して、正のエネルギーのフラッシュ光は遠くに飛び去り、そのエネルギーは有効利用される。

> **質問 37 引き出される全エネルギー。**まとめると、この全過程の結果として遠くの技術者が使える全有効エネルギーはいくらか。この過程でどれくらいの質量またはエネルギーが入力として使われたか。
>
> **質問 38 角運動量の第一段階での減少。**思考問題、任意。第一段階単独で引き出されるエネルギーによりブラックホールの回転率は減るか。答えを出すときに、回転しないブラックホールからエネルギーを引き出したときの類推を思い出せ（第 3 章 練習問題 6 ）。

F.13 挑戦

最大極限カーブラックホールの赤道面で石や光の軌道を十分に分析し尽くそうとすると面倒な計算にぶち当たる。計画は、回転していないシュワルツシルトブラックホールで同じような結果を導いたときと似ている（第 4 章と第 5 章)。

- dr と $d\phi$ を腕時計時間 $d\tau$ に関係づける式から石の軌道を計算する（162 ページの (4.21) 式と (4.22) 式と似ている)。
- 有効ポテンシャル (171 ページの (4.32) 式) を使って軌道を分類し定性的に記述する。
- 第 4 章の練習問題で分析したように安定な円軌道を探す（安定な軌道から、降着円盤を軌道回転する粒子の振舞いとそのエネルギーの現実的な分析ができる)。
- 第 5 章で行ったような光の軌道を予測する。
- プロジェクト B「ブラックホールの内側」でシュワルツシルトブラックホールについて行った分析と比較しながら地平線の内部の生活を詳しく予想する。このような分析はおそらく空想であろう。なぜならコーシー地平線（(F.2) 式のマイナスの符号を選ぶ）の内側で時空は不安定となり、よってシュワルツシルト計量では表せなくなり、たぶん向こう見ずなダイバーに致命的であるからだ。
- 最大極限自転ブラックホールにはもうこれ以上角運動量を付け加えられないことを確かめる。最大限界ブラックホールの回転方向に運動する物体が地平線を越えることによって、すでに最大の角運動量に達しているブラックホールに角運動量を増加させることができるか。

これらの結末にたどり着く途中にはかなり複雑な代数計算があり、それは半径 r と (F.4) 式にある換算円周 R の関係のためだ。代数計算を終えてしまえば、結果を簡単なコンピュータグラフィックプログラムを使ってプロットすることができる。

- 旺盛なチャレンジ精神を持っている読者または代数計算プログラムの使える読者のために、このプロジェクトの結果は、最大値より小さい角運動量パラメータ $a = J/M$ で自転するブラックホールについて再導出することができる。計量 (F.1) から出発して
$$R_a^2 = r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r} \tag{F.50}$$
で定義される、より一般的な換算円周 R_a を使え（赤道面で正しい)。結果の式は極端な場合でチェックすることができる。$a \to 0$ でシュワルツシルト極限になり、$a \to M$ でこのプロジェクトで得た式になる。
- 我々は 2 つの重要な計量について学んできた。自転しないブラックホールのシュワルツシルト計量と自転するブラックホールのカー計量。すでに身につけた技術を第 3 の計量である、いわゆる**ライスナー-ノルドシュトルム計量** (Reissner-Nordstrøm metric) に適用する。これは電気を帯び自転しないブラックホールの計量である。このように帯電したブラックホールの中心を通る平面上で互いに近くで起きる事象

に対して、ライスナー-ノルドシュトルム計量は

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)} - r^2 d\phi^2 \qquad \text{(F.51)}$$

となる。ここで Q はブラックホールの電荷であり、単位は長さとなっている。

幸運を！

F.14 自転するブラックホールの基本的な文献

自転するブラックホールの入門的文献 自転するブラックホールの人物と科学的な物語として、Kip S. Thorne, *Black Holes and Time Warps:Einstein's Outrageous Legacy,* W. W. Norton, New York, 1994, 46–54 ページおよび 286–299 ページ。

シュッツ（Bernard F. Schutz）の *A First Course in General Relativity,* Cambridge University Press, New York, 1985, 294–305 ページ。

Misner, Thorne and Wheeler の *Gravitation,* W. G. Freeman and Company, San Francisco（現在 New York）, 1973 の第 33 章には要約されたすばらしいボックスがあり、綿密にできている。ただしテンソルと微分形式に悩まされる。ほぼ 30 歳を迎えた。

Robert M. Wald の *General Relativity*（University of Chicago Press, Chicago, 1984）の第 12 章は信頼でき、直接的である。数学が深遠で、物理的な結論を得るために、かなりの量の数学を読まされることになる。それだけにすっきり書かれている。

Stuart L. Shapiro and Saul A. Teukolsky の *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars*（John Wiley, New York, 1983）の 12.7 節 357–364 ページは自転するブラックホールを扱っているが、テンソル計算ではなく代数計算がほとんどで、ある程度詳しく軌道を考察している。

Steven Detweiler 編集の *Black Holes:Selected Reprints,* American Association of Physics Teachers, New York, 1982. 絶版になっているが、物理学の本を多く扱う図書館にあるかもしれない。

自転するブラックホールのオリジナルの論文 最初の論文：R. P. Kerr, "Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics," *Physical Review Letters,* Volume 11, 237–238 ページ（1963)。

物理を考えるとき座標系の選び方によって、便利になったりやっかいなことになったりする。ボイヤとリンキストはこのプロジェクトの分析を理解しやすくする座標系を考案した。Robert H. Boyer and Richard W. Lindquist, "Maximum Analytic Extension of the Kerr Metric," *Journal of Mathematical Physics,* Volume 8, Number 2, 265–281 ページ（1967 年 2 月）。Brandon Carter, "Global Structure of the Kerr Family of Gravitational Fields," *Physical Review,* Volume 174, Number 5, 1559–1571 ページ。

完全を期すため、ニューマン帯電ブラックホール：E. T. Newman, E. Couch, K. Chinnapared, A. Exton, A. Prakash, and R. Torrence, "Metric of a Rotating, Charged Mass," *Journal of Mathematical Physics;* Volume 6, Number 6, 918–919 ページ (1965)；E. T. Newman and A. I. Janis, "Note on the Kerr Spinning-Particle Metric," *Journal of Mathematical Physics,* Volume 6, Number 6, 915–917 ページ（1965）。

ペンローズ過程。自転するブラックホールから回転のエネルギーを取り出すためのものとして：R. Penrose, "Gravitational Collapse: The Role of General Relativity," *Revista del Nuovo Cimento,* Volume 1, 252–276 ページ（1969）。

F.15 さらなる参照文献と謝辞

初めの引用：S. Chandrasekhar, *Truth and Beauty: Aesthetics and Motivations in Science,* University of Chicago Press, 1987, 153–154 ページ。

273 ページの引用：Stephen Hawking, *Black Holes and Baby Universes,* Bantam Books, New York, 91–92 ページ。

276 ページのコーシー地平線についての引用：E. Poisson and W. Israel, "Inner-Horizon Instability and Mass Inflation in Black Holes, "*Physical Review Letters,* Volume 63, Number 16, 1663–1666 ページ（1989 年 10 月 16 日）。

太陽の角運動量の値（276 ページ）は Douglas Gough から個人的に聞いた。

294 ページの引用：John Archibald Wheeler and Kenneth Ford, *Geons, Black Holes, and Quantum Foam, A life in Physics,* New York, W. W. Norton & Company 1998, 312 ページ。

Stephan Jay Olsen は F.12 節の実用的なペンローズ過程の中で光のフラッシュを使うことを勧めてくれた。

帯電したブラックホールのライスナー-ノルドシュトルム計量（303 ページの (F.51) 式）について詳しくは、Misner, Thorne and Wheeler の *Gravitation*, W. H. Freeman and Company, San Francisco（現在 New York）, 1973 の Subject Index と Bibliography and Index of Name の記載事項を見よ。

プロジェクトG

フリードマン宇宙

- 宇宙の大きさは時間とともにどのように変わるのか。
- 宇宙は再収縮するのか、それとも永遠に膨張し続けるのか。
- 我々がまだ見ていない銀河はあるのか。
- 最近の観測によれば宇宙の最終的な運命はどうなるのか。

我々は創造の神秘を見抜くことができるだろうか。その答えがいつの日にか "yes" になるだろうという期待をかきたてる証拠は存在しない。あらゆる予想に反してまでも宇宙膨張のような素晴しい現象を正しく予言できなかったのがよい例である。

—ミスナー-ソーン-ホイーラー

G.1 生涯最大の誤り

フリードマン宇宙モデルはアインシュタインの場の方程式に基づいた最も単純な宇宙モデルである。1922年フリードマン (Alexander A. Friedmann) は、星が散らばっている状態を、圧力ゼロで一様密度のダスト (または塵) の雲として理想化した。密度の値によって、宇宙は永遠に膨張するか、または最大の大きさにまで膨張しビッグクランチへと再収縮する。再収縮の場合、「その後」が存在しない最後の瞬間というものがある。「その前」が存在しない最初の瞬間があったのと同様である (ホイーラーは再収縮宇宙を好んでいる。一つにはこのモデルには境界条件にまつわる困難がないためである。何もない。両端を「越え」たところに時空はない)。

宇宙は膨張から始まったとするフリードマンの驚くべき予言は予想外だった。初めはアインシュタインも受け入れなかった。アインシュタインは彼にとって最も偉大な英雄であったスピノザ (Benedict de Spinoza) によって感化され、若いときから創造の瞬間など存在しないと思っていた。彼は、時間や物理法則、宇宙が永遠から永遠に不滅のまま存在し続けると信じていた。この考えをもとにアインシュタインはフリードマン宇宙論を排除した。ハッブル (Edwin Hubble) が遠い銀河ほど速く後退していることを実証した後になってようやく膨張宇宙は一般に受け入れられた。そしてアインシュタインはフリード

マンモデルを受け入れ、ガモフ（George Gamow）に、フリードマンモデルに異義を唱えたことが「生涯最大の誤り」だと打ち明けた。

これからの内容は ピーブルス（P. J. E. Peebles）の *Principles of Physical Cosmology* (Princeton University Press, 1993) と ミスナー（Misner)、ソーン（Thorne)、ホイーラー（Wheeler）の *Gravitation* （W. H. Freeman, 1973）略して MTW に脚色を加えたものである。このプロジェクトでは、これまで述べてきた解析よりも厳密さを欠き、くだけたスタイルになっている。この本の終わりに至って、簡単な計量で表される物理系を使い果たしているという兆候を見せている。

フリードマンモデルは**宇宙原理**と呼ばれるものを満たしている。それは、大きなスケールで宇宙はどこでも**一様**（例えばどの方向を見ても同じような性質をもっている）であることを仮定する。言い替えれば、宇宙のあらゆる場所は本質的に同等である。最近の観測では、これらの仮定はほぼ正しいが、平均密度を銀河団[*1]よりずっと大きな空間領域で評価したときのみという条件がつく。

G.2 2次元の円上の1次元の生き物

膨張する球形の気球に貼り付けられたコイン（図 1）のたとえ話から始めよう。コインは、3次元空間で膨張する2次元球面上に制限された生き物にたとえられている。気球が膨張すると、各コイン上の生き物にはすべて他のコインが離れていくのが見える。各生き物は同じ様子を見て、自分の位置が宇宙モデルの中心にあると言っても構わない（全くすごいエゴだ)。

2次元のコイン上の生き物はどうやって気球の幾何学を分析するのだろうか。この質問に答えるために、もっと簡単な幾何学を考えよう。半径 r の2次元球面上に住む1次元の生き物の場合だ（図 2)。今から r は時間とともに変わらないと仮定する。

図 2 から

$$r^2 = x^2 + y^2 \tag{G.1}$$

または、書き直して

$$y^2 = r^2 - x^2 \tag{G.2}$$

とする。1次元の生き物は、固定された半径 r の円に沿った短い長さを測ろうとする。(G.2) 式の両辺を r 一定のもとで微分し

$$2ydy = -2xdx \qquad \boxed{r = 一定} \tag{G.3}$$

これに (G.2) 式を代入すると

$$dy = -\frac{xdx}{y} = -\frac{xdx}{(r^2 - x^2)^{1/2}} \qquad \boxed{r = 一定} \tag{G.4}$$

[*1] 訳注：銀河団は銀河が数百個から数千程度集まった宇宙の構造である。

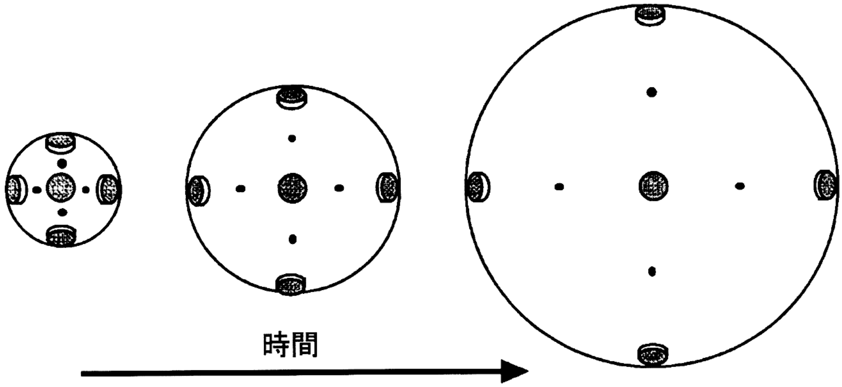


図 **G.1**　宇宙膨張のモデル：コインを貼り付けて膨張する風船。各コイン上には 2 次元の生き物がおり、風船の表面だけが彼らの空間である。生き物はそれぞれ、近くのコインがすべての方向に一様に遠ざかり、遠いものほど速く遠ざかっているのを見る。よって各観測者は自分が宇宙の中心にいると知る。相対速度を過去にさかのぼれば、各コイン上の生き物は、膨張が始まってから測られる現在の時刻 t を求めることができる。風船の半径が大きくなってもコインは膨張しない。同様に、我々の銀河と太陽系（局所的な構造のため時空曲率によって決められる大きさ）、我々の体の分子（量子力学によって決められる大きさ）は大きくならない。

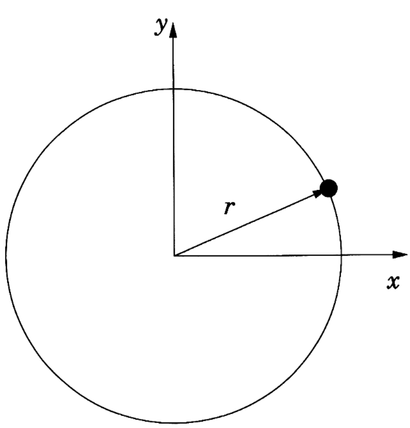


図 **G.2**　2 次元の円周上に生きている 1 次元の生き物（●）。

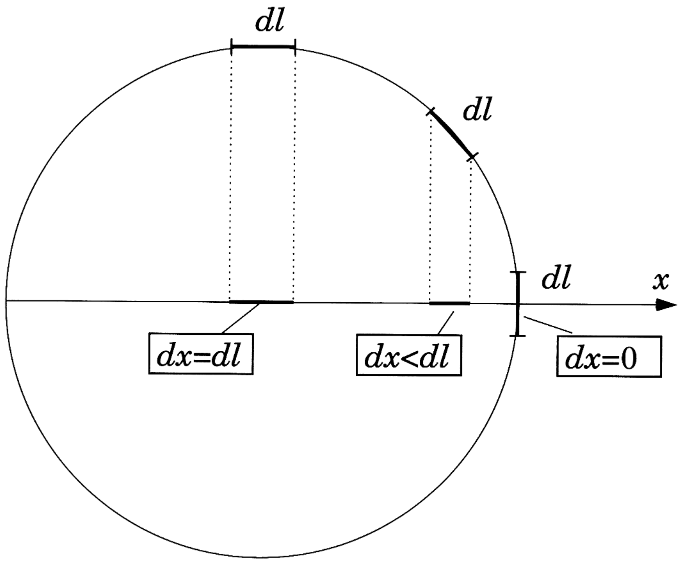


図 **G.3** 1 次元の生き物が円周に沿って等しい長さ dl を測っている。dl の値は水平座標に沿った増分 dx のいろんな値に対応する（**(G.6)** 式の右辺は $x=r$ では決められない。したがって、ここで **(G.6)** 式の両辺に右辺の分母をかけた後に $x \to r$ とした結果を示す)。

となる。1 次元の観測者は、円に沿って長さ dl の短い物差しを当てる。(G.4) 式から

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2 + \frac{x^2 dx^2}{(r^2 - x^2)} \qquad \boxed{r = 一定} \quad \text{(G.5)}$$

が得られる。

質問 1 一定の dl。でも違う dx の値。(G.5) 式の右辺を通分すると

$$dl^2 = \frac{dx^2}{1 - x^2/r^2} \qquad \boxed{r = 一定} \quad \text{(G.6)}$$

となることを示せ。

図 3 に 1 次元の観測者に対する dx と dl の関係を示した。

G.3 4 次元気球上の 3 次元の我々

2 次元中の 1 次元の円（図 2 と図 3）から 3 次元空間中の 2 次元球面へ（図 1)、最後には 4 次元空間の中の 3 次元超球面である（これら 4 次元は空間的で、後に第 5 の次元として時間を加える）我々の最初の宇宙モデルへ飛躍する。

ピーブルス（彼の書の 60 ページ）にしたがうと、4 番目の空間次元を w とし、中心からの距離を R と記す。そして空間の「3 次元球」（超球面）は、原点から距離 R（超半径）に固定された点 (x, y, z, w) の集合である：

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = r^2 + w^2 \tag{G.7}$$

ここで

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \tag{G.8}$$

である。(G.7) 式を書き直すと

$$w^2 = R^2 - r^2 \tag{G.9}$$

となる。

質問 2 4 番目の空間次元を消去せよ。 我々は計量を探している。計量は、宇宙年齢に比べて短い時間行われる実験を記述するために微分の形をしている。R を定数として（つまり与えられた宇宙のサイズとして）(G.9) 式を微分すると

$$dw = -\frac{rdr}{w} = -\frac{rdr}{(R^2 - r^2)^{1/2}} \qquad \boxed{R = 一定} \tag{G.10}$$

となることを示せ。

空間 4 次元の線素 dl の 2 乗は

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{r^2dr^2}{R^2 - r^2} \qquad \boxed{R = 一定} \tag{G.11}$$

である。簡単のため、この本を通じて行ってきたように一つの空間面上で（$z = 0$ と $dz = 0$）起きる事象だけ考えることにする。このように限定することによって、2 つの座標 r と ϕ だけ使ってこの平面上の位置を記述することができる。これら極座標で (G.11) 式は

$$dl^2 = dr^2 + r^2d\phi^2 + \frac{r^2dr^2}{R^2 - r^2} \qquad \boxed{z = 0, R = 一定} \tag{G.12}$$

となる。

質問 3　距離の増分。 (G.12) 式を dr^2 についてまとめると

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - r^2/R^2} + r^2 d\phi^2 \qquad \boxed{z = 0, R = \text{一定}} \quad \text{(G.13)}$$

となることを示せ。

(G.13) 式において、R は**宇宙の超半径**であり、その空間の原点 ($r = 0$) はどこにでもおくことができる。宇宙には一意的な中心が存在しないからだ。

空間の式 (G.13) から得られる結果 (質問 4) を R が一定の仮定のもとで、調査してみよう。長さ一定のメートル尺 dl を中心 ($r = 0$) からいろんな距離 r で半径方向 ($d\phi = 0$) に置くことを仮定しよう。

質問 4　定数 dl と変数 dr。 一定の長さ dl の物差し ($d\phi = 0$) に対して、半径の増分 dr を以下の条件のもとで定性的に考察せよ。

A.　r の値が R よりもずっと小さい。
B.　r の値は R の値に近いのだが R とは等しくない。
C.　r の値が R に近づく。

図 3 の結果との類推を明らかにせよ。

G.4　宇宙モデルの計量

(G.10) 式から (G.13) 式までを導出するにあたって、宇宙の超半径 R は時間が変化しても変わらないと仮定した。R があまりにゆっくり変化するために、粒子や光のフラッシュが微小距離 dl を進む間、実質的に変化しないならば、これらの式も大きくは変わらない。新しい変数 $u \equiv r/R(t)$ を定義し、ゆっくり時間変化する $R(t)$ に対して

$$u \equiv \frac{r}{R(t)} \quad \text{および} \quad du = \frac{dr}{R(t)} \qquad \text{(G.14)}$$

とする。これらを (G.13) 式に代入し指標となる新しい定数 k を導入すると

$$dl^2 = R^2(t)\left(\frac{du^2}{1 - ku^2} + u^2 d\phi^2\right) \qquad \text{(G.15)}$$

となる。陽に時間変化する量は $R(t)$ だけである。これまで**閉じた幾何学**と呼ばれる超球面の幾何学にしたがう宇宙モデルについて議論してきた。G.6 節では他の宇宙モデルについて述べる。定数 k は モデルを一般化するために (G.15) 式に導入した。閉じたモデルでは $k = +1$ である。G.6 節では、後に**開いた宇宙**として定義される宇宙モデルに対して $k = -1$ とし、後に**平坦な宇宙**として定義される宇宙モデルに対して $k = 0$ とする。

dl に対して「宇宙の計量」を構成するために、(G.15) 式をどう使えばよいのか。計量はアインシュタインの場の方程式を満たさなければならない。とりあえず、以前にあったような計量と同じような形で書いておく：

$$d\tau^2 = dt^2 - dl^2 = dt^2 - R(t)^2\left(\frac{du^2}{1-ku^2} + u^2 d\phi^2\right) \tag{G.16}$$

微小な時間経過 dt にはどんな物理的な意味があるのか？ このモデルで、宇宙を満たしている一様なダストに対して静止している「ダスト時計」で記録される時間変化だ。それでは、時間 t はどうやって構成されるのか？ ダストの各粒子は u と ϕ が一定の値のまま静止しているため $d\tau = dt$ は腕時計時間（固有時）を測ることになる。したがって t は宇宙の初めからダスト上の時計で測られる全時間である。

質問 5 静止宇宙での時計合わせ。 R が一定のとき、ダスト粒子上にある時計を合わせる方法を述べよ。その方法は平坦時空 (18 ページ) で格子を使った方法と違うか。

計量 (G.16) はアインシュタインの場の方程式を満たしているのか？ そうだ、満たしている。ただし $R(t)$ が G.6 節で述べる特別な形をとっていればの話であるが。(仮に (G.16) 式を組み立てるために (G.15) 式の代わりに (G.13) 式を使っていれば、その結果得られた計量は場の方程式を満たさないであろう。)

質問 6 ほとんど平坦な局所時空。 $R(t)$ が、ある特定の実験をしている期間一定であり、その実験の空間の広がり（r の値で特徴づけられるが）R に比べて小さいと仮定する。これらの仮定のもとで時空の小さい領域をとれば、(G.16) 式が平坦時空の計量に任意に近くなることを示せ。

(G.16) 式から、閉じた宇宙について多くのことが引き出せる。$u < 1$ つまり $r < R$ の要請では、移動することのできる距離に制限を与えることはできない。中心をつくり、距離、例えば $r = R/2$ 移動する。そして別の中心をつくり、さらに $r = R/2$ 移動する。そして・・・。$k = +1$ の閉じた宇宙モデルでは、図 1 の気球上で「まっすぐ」（つまり大円に沿って）動く 2 次元の生き物が最後には出発点に戻ってくるのと同じように、いつかは出発点に戻って来る。

G.5 閉じたフリードマン宇宙モデルの時間発展

ここまでの分析はどちらかというと一般的なものであった。アインシュタイン方程式のフリードマン解から R の時間変化がわかるのだが、ここからその結果に焦点を当てる。フリードマン条件（一様分布のダスト、圧力ゼロ）をアインシュタインの場の方程式に課

すと、閉じた宇宙に対して以下の結果が得られる（MTW, 705 ページ）：

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + 1 = \frac{8\pi}{3}\rho R^2 \tag{G.17}$$

ここで ρ（ギリシャ文字の「ロー」）は、空間で一様分布を仮定したときのフリードマンダストの局所質量密度である（実際に R が現在の値の約 1 万分の 1 のとき、輻射は質量エネルギー密度中でダストと同じ寄与をしていた。非常に初期の宇宙では輻射が宇宙の質量エネルギー密度中で最も大きな寄与をしていた）。ダストで満たされたフリードマン宇宙モデルに対する質量保存は、以下の式では M が一定であることを表している：

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \tag{G.18}$$

(G.18) 式の右辺を「体積と密度の積」と見なし、記号 M を「宇宙の質量」と呼ぶ誘惑にかられる。このような一般化には注意が必要だ。MTW が指摘するように（705 ページ）、「ケプラー軌道の周期を通じて、または他のどんな方法でもよいのだが、その引力を測定するために、立つような "足場" は宇宙の外側に存在しない」閉じた宇宙モデルは十分大きな質量密度を持っており、体積が有限であるということは正しい。この体積（ある時刻における）と質量密度 ρ の積は間違いなく質量 M の値になる。M が小さいと、閉じず、有限の値に留まらない宇宙モデル（G.6 節で述べる）になる。これらの宇宙モデルに対して「全質量」という概念がそのまま使えるわけがない。すべてのフリードマンモデルでは、局所質量エネルギー密度は直接観測できるが、M はそうではない。これらの理由のため、記号 M を宇宙モデルの**質量パラメータ**と呼ぶ。

質問 7　M の関数としての R の変化率。 (G.18) 式を使い、(G.17) 式を

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 + 1 = \frac{2M}{R} \tag{G.19}$$

に書き直せ。

質問 8　R の最大値。 宇宙膨張が止まるとき、R の値はいくらになるか。シュワルツシルトの影が見えないか。

(G.19) 式はダスト粒子 1 個の質量の半分 $m/2$ をかけることによって、意味ありげな形に書き直すことができる：

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{mM}{R} = -\frac{m}{2} \tag{G.20}$$

(G.20) 式は、幾何学単位で表した、「宇宙の端にある」ダスト粒子のニュートンのエネルギー方程式の形になっている。左辺の最初の項はダスト粒子の運動エネルギーに対応し、第二項は「宇宙の重力場」のポテンシャルエネルギーで、右辺の項 $-m/2$ はダスト粒子

の全エネルギーに対応する。「宇宙の端」や「宇宙の重力場」のような概念は一般相対論では意味をもたないため、見た目そのままのニュートン的解釈は類推に過ぎない。

時間が経つにつれてフリードマン宇宙モデルの半径 $R(t)$ はどうなるのか。(G.19) 式を積分した解が、**サイクロイド** であることを知るだろう（314 ページの図 4)。サイクロイドは、車輪が水平面上で滑べることなく転がるときに外輪上の点が描く軌跡のことである。ギリシャ文字 η（エータ）で車輪の回転角を表す。以下の式を (G.19) 式に導入する：

$$d\eta = \frac{dt}{R(t)} \tag{G.21}$$

結果は

$$\frac{1}{R^2}\left(\frac{dR}{d\eta}\right)^2 + 1 = \frac{2M}{R} \tag{G.22}$$

となる。 我々は η を**時間パラメータ**と呼ぶ。定数 $2M$ については、定数

$$q = \left(\frac{R}{2M}\right)^{1/2} \tag{G.23}$$

を導入して消去する。

質問 9 宇宙を積分。

(G.23) 式を (G.22) 式に代入して整理し、積分するために

$$d\eta = \pm\frac{2dq}{(1-q^2)^{1/2}} \tag{G.24}$$

とせよ。積分表を使って積分を実行し

$$\eta = 2\arcsin q \quad \text{または} \quad q = \sin\frac{\eta}{2} \tag{G.25}$$

であることを示せ。(G.23) 式の q を代入し、半角の公式

$$2\left(\sin\frac{\eta}{2}\right)^2 = 1 - \cos\eta \tag{G.26}$$

を使って、最終的に

$$\frac{R}{M} = 1 - \cos\eta \quad 0 \le \eta \le 2\pi \tag{G.27}$$

となることを示せ。

宇宙車輪が転がるにつれて回転角 η は増加する。(G.27) 式の右辺はゼロから、$\eta = \pi$ で 2 まで増加する。そして再び $\eta = 2\pi$ でゼロになる。このフリードマンモデルで、閉じた宇宙は爆発し最大にまで広がり、そして終末的な特異点に収縮する。

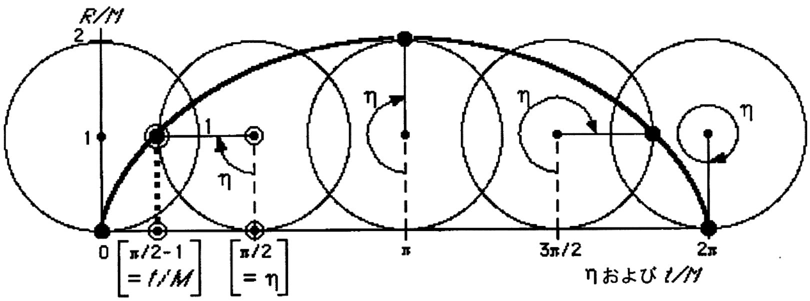


図 **G.4** コンピュータによる構成図：滑べらずに回転する外輪上の点が、閉じたフリードマンモデルにしたがって、宇宙の時間発展を表すサイクロイドをたどっている。宇宙は $t = \pi M$ で最大の大きさに達し、$t = 2\pi M$ でビッグクランチに再収縮する。例：図中左側にある四角形を見よ。その各頂点には、丸で囲まれた黒丸がある。この四角形の右側の **2** つの頂点上にある円に囲まれた黒丸は横軸で $\eta = \pi/2$ にある。η は車輪が転がる角度であり、車輪の中心の水平座標でもある。外輪上の黒丸の座標は何だろうか。**(G.29)** 式から、時間の値が $t/M = \eta - \sin(\eta)$ であることがわかる。$\eta = \pi/2$ では、$\sin(\eta) = 1$ であり、四角の左側の円で囲まれた黒丸 **2** つに示してあるように時間の値は $t/M = \pi/2 - 1$ である。R/M の値（この時刻での宇宙の R 値）は **(G.27)** 式で与えられ、サイクロイドをたどっている太い線上の大きな点でその位置を示した。

(G.27) 式は、興味ある物理量が（この場合宇宙モデルの半径 R）、直接時間 t の関数としてではなく、パラメータ η で表されるので、**パラメータ方程式**と呼ばれる。

質問 10　宇宙の時刻を測る。(G.21) 式から

$$dt = R(t)d\eta \tag{G.28}$$

とせよ。R に対しては (G.27) 式を代入し積分し

$$\frac{t}{M} = \eta - \sin\eta \tag{G.29}$$

となること示せ。

図 4 に (G.27) 式と (G.29) 式のサイクロイドを示した。宇宙の時間発展は、水平面上を滑べらずに転がる車輪上の黒い丸で表される。これらの式には調節可能なパラメータは存在しない。間違った予言を隠すための「その場しのぎ」のパラメータがないのだ。再収縮するのに十分大きな質量パラメータ M をもつ宇宙モデルに対して、これらの式は時間の関数 t として R を一意的に予測する。

意見：簡単過ぎて間違っているはずのない バン-クランチ宇宙

時空は質量にどのように動くべきか教え、質量は時空にどのように曲がるべきか教える。ブラックホールが近くの証人に時空曲率を目撃させるものであるとするならば、宇宙は空間と時間の最も大きなスケールでそれ自身に影響を及ぼすもののようだ。星々の存在によって宇宙を特徴づける空間と時間のスケールを知ることができる。太陽は、水素を燃やしてヘリウムに変え、水素とヘリウムの間の核子当たりの質量差をエネルギーとして得ており、さらにいくらかのヘリウムを重い元素に変えている。核子当たりの質量は、水素で 1.00783 およびヘリウムで 1.00065 である（単位は、炭素の最も多い同位体の質量を 12 としている）。

空間が膨張しているということは遠い銀河から届く光の赤方偏移に最もよく現れている。赤方偏移は遠い銀河ほど大きくなる。風船の膨張（図 1）は宇宙のこのような膨張に対する簡単なモデルとなっている。このモデルから、球面の半径 $R(t)$ について時間 t の依存性を知ることができる。このモデルでは、時空にはたった 2 つの成分しかない。1 つはその瞬間の「内的曲率」$6/R^2(t)$ であり、理想的な 3 次元幾何学の瞬間的な半径によって固定される。曲率へのもう一つの寄与は、宇宙時間の経過にともなう半径の変化 $(6/R^2)(dR/dt)^2$ である。ハッブルが宇宙膨張を測定する数日前に、アインシュタインはこのことを考えていたが、本質的に一定の半径 R をもつ閉じた宇宙の方が自然だと理解した。

この時点で重力理論の第二の部分に立ち向かうのが難しくなる：質量は時空にどのように曲がるべきか教える。アインシュタインの時代には、宇宙を曲げて閉じさせるのに必要な質量が不足しているようだった。したがってアインシュタインはそれ以上の曲率源、いわゆる「宇宙定数」または「宇宙項」の存在を仮定した。私がアインシュタインとガモフとともに高等研究所のフルドホールの入口を入って行ったとき、アインシュタインがガモフに宇宙項について「あれは私の生涯で最大の誤りだ」と言っているのを私は聞いた。もしその項をつけないと、物質が時空にどのように曲がるか教える式は

$$\left(\frac{1}{R}\frac{dR}{dt}\right)^2 + \frac{1}{R^2} = \frac{8\pi}{3}\rho$$

になる。この式は、図 4 のサイクロイドによって描かれた半径と時間の間のつながりを予言する（図中の説明文）。宇宙はビッグバンで始まる。徐々に膨張が遅くなる期間で、最大の半径に達し、半径 0 に再収縮する。「ビッグバン」から「ビッグクランチ」への宇宙史である。

1998 年 3 月 3 日火曜日のニューヨークタイムズの科学時事部門の ウィルフォード（John Noble Wilford）は 2 つの別々の研究グループによる観測結果を記事にした。それによれば、彼らの解釈は、今日の宇宙膨張は最大膨張に近づくときに期待されるスピードダウンを迎えているのではなく、スピードアップしているというのだ（324 ページのボックス）。後に、厳格なベテラン重力物理の研究者にプリンストン大学の物理棟で出くわしたとき、例の加速膨張の証拠を信じているかどうか尋ねた。彼は「信じていない」と答えた。私もそうだ。どうして？ 理由が 2 つある：(1) スピードアップは超新星爆発が標準光源であることに信用をおき過ぎているから。(2) このような膨張は、間違うには簡単過ぎるという宇宙論の視点と矛盾する。私にはそう思える。理論と実験の間にこのような衝突が起きると、決定的で大きな物理学の進歩への引き金となることがよくある。進歩がやがて起きることを期待する。

— ホイーラー

これらの式にある時間 t の物理的な意味は何か。膨張収縮宇宙モデルでは、他のダスト粒子上の時計は相対的に静止していない。したがって、同期過程は質問 5 で答えたほど簡単ではないかもしれない。ダスト上の時計の時刻はそれぞれについて合わせなければならない。それをするための理想的な方法が 2 つある。まず、一つ目として、ビッグバンの瞬間にゼロに合わせることができる。この過程を実行することは技術的に困難である。二つ目として、各時計はいつでも宇宙モデルを使うことにより合わせることだ。各ダストの微

粒子上の時計は、対称性のためすべて同じだと仮定する。各時計観測者は閉じたフリードマン宇宙モデルに自分が住んでいることを知っているので宇宙のパラメータと近傍のダスト粒子の後退率から、図 4 の曲線に沿った現在の宇宙の位置、つまりビッグバン以来の時刻 t を知ることができる。

この宇宙モデルにしたがうと、車輪は 1 回以上回転するのだろうか。宇宙は特異点から現れてまた別の特異点へと消えていくのか。一般相対論はこれらの質問には答えられない。このモデルでは、時間がビッグバンから始まりビッグクランチで終わる。時間がなければ、我々が知っているような物理法則は存在せず、したがって図 4 の曲線のどの端でも境界を越えて適用できる科学的な予言も存在しない。

閉じたフリードマン宇宙モデルはホイーラー（John Wheeler）が好むものであるが（315 ページのボックス）、現在の観測は閉じた宇宙と合わないようだ（324 ページのボックス）。実際、これらの観測はこのプロジェクトで取り上げているどんな宇宙モデルとも合わない。

G.6　開いた宇宙モデルと平坦な宇宙モデル

G.5 節では、閉じた宇宙モデルについて述べた。宇宙の 3 次元有限体積の質量パラメータ M の値は十分大きいため、宇宙は最初膨張するが、最終的にはクランチに到る。もし宇宙の質量パラメータが十分には大きくなく、再収縮に到らなければ、宇宙は永遠に膨張し続ける。永遠に膨張する宇宙モデルは**開いた宇宙**と呼ばれる。圧力のないダストのフリードマンモデルの永遠膨張に対して、場の方程式は

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 - 1 = \frac{2M}{R} \qquad \text{(G.30)}$$

となる（312 ページの (G.19) 式と比較せよ）。

質問 11　開いた宇宙の膨張率。宇宙の時間発展について (G.30) 式が何を意味しているのか定性的に調べよ。非常に小さい R と非常に大きな R に対して膨張率 dR/dt はどうなるか。膨張率が 0 になる R（または極値）は存在するか。

(G.30) 式を (G.20) 式と似た形に書き直せ。結果の式をダスト粒子のニュートンエネルギーで解釈せよ。この場合、ダスト粒子の全エネルギーは正か負または 0 か。

質問 12　dR/dt の積分。(G.23) 式で変数変換することで、(G.30) 式の積分の準備をせよ。結果が

$$\frac{dt}{M} = \pm\frac{4q^2 dq}{(1+q^2)^{1/2}} \qquad \text{(G.31)}$$

となることを示せ。

積分表を使って、(G.31) 式を積分すると、物理的な意味は再収縮宇宙モデルのものとは

根本的に違うことがわかる：

$$\frac{t}{M} = 2\left(\frac{R}{2M}\right)^{1/2}\left(\frac{R}{2M}+1\right)^{1/2} - 2\ln\left[\left(\frac{R}{2M}\right)^{1/2} + \left(\frac{R}{2M}+1\right)^{1/2}\right] \qquad \text{(G.32)}$$

この曲線は他の場合とともに図 5 にプロットしてある。

フリードマン宇宙モデルの 3 番目は収縮と永遠の膨張の間にある。この 3 番目のモデルは、大きな半径の極限で減少率が確実にゼロになるように膨張する。もし質量パラメータが臨界値（M_{crit}）をとると、結果は

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{2M_{\text{crit}}}{R} \qquad \text{(G.33)}$$

にしたがう。

質問 13　平坦宇宙の膨張率。 (G.33) 式が宇宙の時間発展について表していることを定性的に調べよ。非常に小さい R と非常に大きな R に対して膨張率 dR/dt はどうなるか。膨張率が 0 になる R（または極値）は存在するか。この宇宙モデルは永遠に膨張するか。

(G.33) 式を (G.20) 式と似た形に書き直せ。得られた式をダスト粒子のニュートンエネルギーで解釈せよ。この場合、ダスト粒子の全エネルギーは正か負または 0 か。

質問 14　3 つのフリードマンモデルを 1 つにまとめる式。 3 つのフリードマンモデルに対して dR/dt をまとめて 1 つの式に書き下せ。310 ページの (G.15) 式に続く段落で定義されるパラメータ k を使え。

質問 15　平坦宇宙に対する半径 $R(t)$

(G.33) 式を半径について 0 から R まで、時間について 0 から t について積分せよ。結果が

$$\frac{t}{M_{\text{crit}}} = \frac{4}{3}\left(\frac{R}{2M_{\text{crit}}}\right)^{3/2} \qquad \text{(G.34)}$$

となることを示せ。

この曲線は他の 2 つの場合の曲線といっしょに図 5 にプロットしてある。

これまで述べてきた 3 つの場合はパラメータ Ω（ギリシャ文字のアルファベットの最後の文字である大文字のオメガ）を使って区別される：

$$\Omega \equiv \frac{M}{M_{\text{crit}}} \qquad \text{(G.35)}$$

3 つのモデルは以下の 3 つの Ω の値によって特徴づけられる：

$\Omega > 1$. 質量パラメータは十分大きく、宇宙を再収縮させられる。この宇宙モデルは**閉じた宇宙**と呼ばれ、**正の空間曲率**をもつ宇宙と言われる。定数 k は (G.16) 式の計量で $+1$ の値をとる。

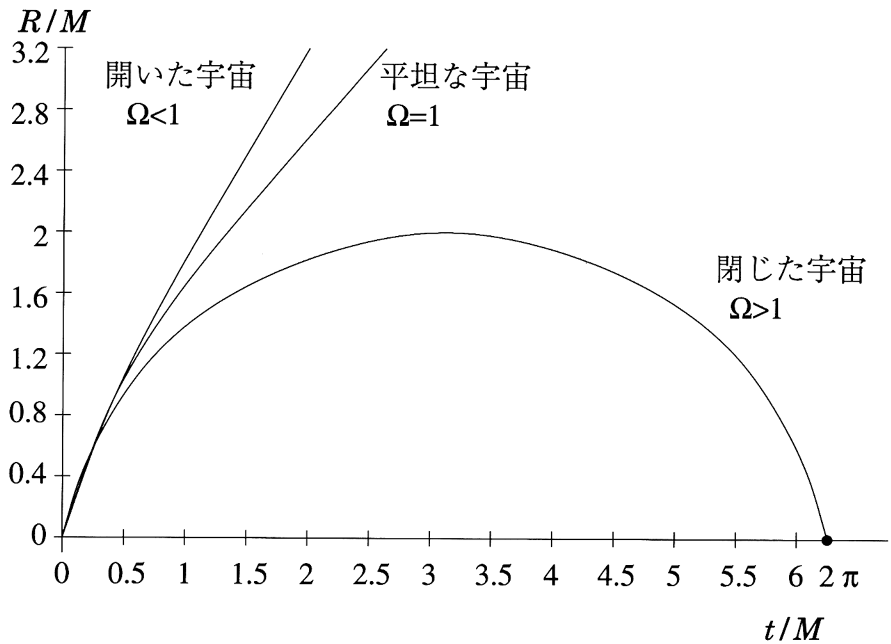


図 G.5　コンピュータプロット：圧力のないダストフリードマン宇宙モデルの 3 つのタイプの時間発展：開いた宇宙と平坦な宇宙、閉じた宇宙。開いた宇宙は永遠に膨張し続ける。平坦な宇宙も永遠に膨張し続けるが、膨張率は徐々に 0 に近づく。閉じた宇宙は最大の大きさまで膨張し、最終クランチへ向けて収縮する。パラメータ Ω は、平坦宇宙の臨界質量 M_{crit} に対する質量パラメータ M の比である。質量パラメータが M_{crit} に等しいと、$\Omega = 1$ になる。 Ω の値が 1 よりも小さいと、永遠に膨張する開いた宇宙になり、1 よりも大きいと閉じた宇宙になる。

$\Omega = 1$. このときの質量パラメータは臨界値 M_{crit} である。宇宙は膨張し続けるのだが、膨張率は 0 に近づく。この結果は**平坦宇宙**と呼ばれ、または**空間曲率がゼロの宇宙**と言われる。定数 k は (G.16) 式の計量で 0 の値をとり、空間部分は平坦になる（平坦なのは空間部分だけである）。

$\Omega < 1$. 質量パラメータが十分小さいため、宇宙の膨張率は減少するが、決して 0 にはならない。**開いた宇宙** 、または**負の空間曲率**をもつ宇宙と呼ばれる。定数 k は (G.16) 式の計量で -1 の値をとる。

3 つの膨張モデルの中に我々が住んでいる宇宙を記述しているものがあるのだろうか。宇宙モデルはたくさんあり、その中でフリードマンの無圧力ダストモデルよりも実在に近いものもある。宇宙論はここ数年間大きく発展したが、しかし 1 つの宇宙モデルだけが一般的に受け入れられるまでには至っていない。我々が直接把握できる宇宙の物質すべてを

あわせても臨界質量 M_{crit} のたった 10^{-2} から 10^{-1} にしかならない。それにもかかわらず、最近まで最も受け入れられていた理論では全質量が M_{crit} に等しいことを仮定しており、理論家は必要とされる質量を説明するために新たに風変わりな物質、いわゆるダークマターを探さざるを得なかった（今のところ間接的にしか観測されていない）。一方で、324 ページのボックスで述べるように、最近の観測を、宇宙の膨張率が実際に時間とともに増加しているという証拠だと解釈している。

G.7 閉じた宇宙モデルの単純化

我々は今全宇宙のうち、どのくらいの部分を見ることができるだろうか。遠くにありすぎてビッグバン以来光が進み続けても我々まで届くことができない銀河は存在するだろうか。ビッグバンでは宇宙のすべての部分が集まっていたので、これらの質問はどんな意味をもつことになるのだろうか。

どのモデルが我々の住む宇宙を正しく表せるのか決まるまで、これらの疑問に答えられない。その一方で、単純化した宇宙モデルの各々についてはこれらの疑問に答えることができる。計量 (G.16) においてパラメータ $k=1$ の閉じた宇宙モデルを選ぼう。この計量は（2 次元の空間次元に対して）

$$d\tau^2 = dt^2 - R^2(t)\left(\frac{du^2}{1-u^2} + u^2 d\phi^2\right) \tag{G.36}$$

になる。この式は、(G.24) 式を使って、時間の増分 dt から角度の増分 $d\eta$ に変換すると、もっと簡単になる。

質問 16　角度としての時間。(G.36) 式の dt に (G.24) 式を代入し計量が

$$d\tau^2 = R^2(t)\left[d\eta^2 - \left(\frac{du^2}{1-u^2} + u^2 d\phi^2\right)\right] \tag{G.37}$$

のように書けることを示せ。

この閉じた宇宙モデルにしたがうと、(G.37) 式の大括弧の中の量は $R(t)$ と独立であり、宇宙の歴史全体を通じて同じ形になっている。

単位球（図 6）を使って、小括弧の空間部分をモデル化すると、計量 (G.37) はさらに簡単になる。

角度 ϕ（空間面の中の方向）は任意の初期の方向から単位球の緯度を表し、変数 u は軸から点までの垂直距離を表す。u は上向きの垂直軸（図 7）から測られる角度 θ で置き換えることができる。単位球に対して、経度に沿った距離も角度 θ でラジアンの単位として測られる。図 7 から、u と新しい角度 θ の関係が

$$u = \sin\theta \tag{G.38}$$

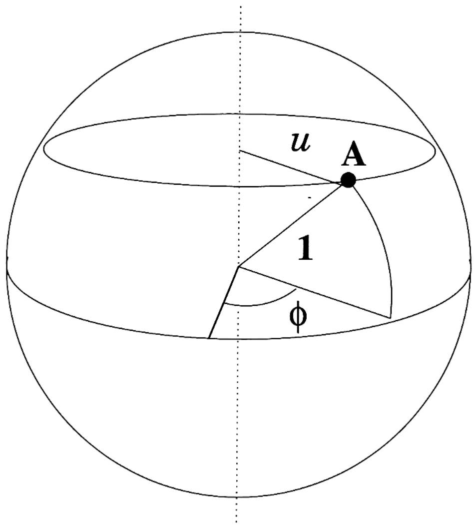


図 G.6　座標 u と ϕ を使った単位球上の事象 A の位置。

であることがわかる。これから

$$du = \cos\theta\, d\theta \tag{G.39}$$

となり、三角関数の公式を使うと

$$d\theta = \frac{du}{\cos\theta} = \frac{du}{(1-\sin^2\theta)^{1/2}} = \frac{du}{(1-u^2)^{1/2}} \tag{G.40}$$

が得られる。

質問 17　閉じた宇宙モデルの計量。これまでの式を (G.37) 式に代入し、計量が簡単な形

$$d\tau^2 = R^2(t)\left[d\eta^2 - (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right] \tag{G.41}$$

になることを示せ。

これまで行ってきたように、空間平面 2 次元に制限した場合、計量 (G.41) は閉じた宇宙を表す強力で単純な式になっていることがわかる。ここで ϕ は平面上で角度 0 の任意の方向を基準にしたふつうの方向であり、r は (G.14) 式と (G.38) 式を通じて変数 θ の中に織り込まれている。宇宙の大きさは $R(t)$ であり、(G.27) 式によって与えられ、それに対応する「角度」η と t との関係は (G.34) 式によって与えられている。ある固定され

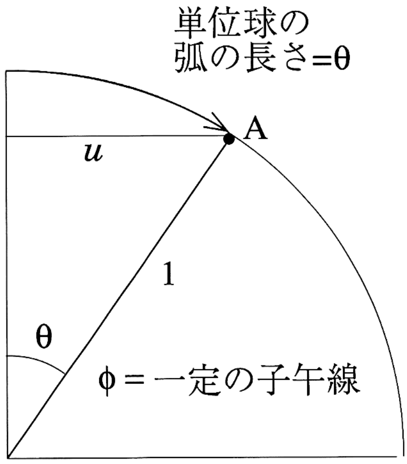


図 G.7　単位球を使った変数 u から θ への変換。単位球は閉じた宇宙モデルの時間独立な幾何学を表す。

た時刻において、この宇宙モデルの空間 2 次元中のあらゆる位置は、半径倍された単位球面上の点によって表される。閉じた宇宙モデル中の 2 つの近接した事象を計量 (G.41) によって関係づける。この事象間の腕時計時間 $d\tau$ は、(G.41) 式の大括弧中の式によって与えられる 2 つの事象間の時空間隔と現在の宇宙半径 $R(t)$ の積である。

このモデルにしたがって (図 4 と図 5) η が π の値になったとき、宇宙は最大膨張点に達し、そして 2π になったとき、宇宙は再びビッグクランチに収縮する。

さあここで、閉じた宇宙モデルで光がどのように進むかを分析することができる。光では $d\tau = 0$ であり (G.41) 式から

$$d\eta = \pm(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2)^{1/2} \qquad \boxed{\text{光}} \quad \text{(G.42)}$$

となる。この式の右辺は簡単に解釈することができる。それは単位球上の 2 つの近接する点の間の距離である。(G.42) 式において η で測った時間が経過すると、光は、角度 θ と ϕ で測った単位球上をその時間と等しい距離移動することがわかる。

G.8　ビッグバンを見る

宇宙全体に日常の言葉を使うと袋小路に陥る。時間と空間はビッグバンで創られた。(G.41) 式から半径 $R(t)$ が 0 のときがその始まりで、どんな 2 つの事象の間の固有時 $d\tau$（同様に固有距離 $d\sigma$）も 0 であることがわかる。単位球（図 6）によって表される空間平面に我々がいるところはどこでもビッグバンに関わっていることになる。ビッグバンは $t = \eta = 0$ で単位球上のあらゆるところで起きた。

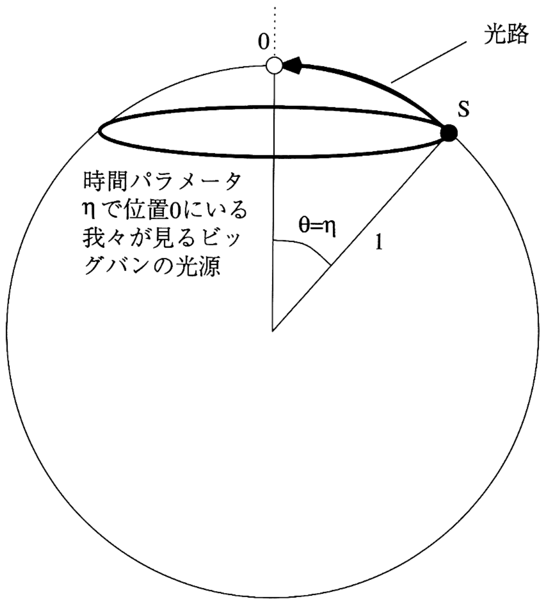


図 G.8　空間の中の平面上で起きるすべての事象の位置を表す単位球。ビッグバンは $t=0$ でこの単位球上のあらゆるところで起きる。太い輪はビッグバンから届いた光を表している。位置 **O** にいる我々はそれを時間パラメータ η の時刻で見ている。**S** から **O** へ進む光は光源の輪から我々の位置へ、固定された経線に沿ってやってくる。

(G.42) 式を使うと、ビッグバン後の時刻にビッグバンをどのように見続けているかを表すことが容易になる。我々の位置を単位球の北極にとり、そこで周りを見回すと何が見えるか調べよう。ビッグバン以来の光が単位球の他の場所から我々にたどり着くまでには時間がかかる。我々が見ている光は単位球の経度に沿って進むであろう。それは (G.42) 式で $d\phi=0$ として表せる。時間パラメータが増加すると、光の伝達する角度も増加し

$$d\eta = d\theta \qquad \boxed{光} \quad (G.43)$$

となる。積分するにはあまりに容易な式である。図 8 にビッグバンからの光源を表す単位球上の輪を示した。それは時間パラメータ η において我々が見ているものである。

dt_1 を 時刻 t_1 に放たれた光の波の周期とする。このときの宇宙の大きさは $R(t_1)$ によって表される。この光の波が図 8 の S から O までのような大きな距離を伝達する。それが受信されたときの周期 dt_2 はどうなっているのだろうか。このときの宇宙は $R(t_2)$ に膨張している。321 ページの (G.42) 式から、すべての膨張期に渡って光は、同じ時間パラメータ η で単位球に沿って同じ距離を進み、その結果、光の波が進んでいる間、$d\eta$

は一定のままであることがわかる。313 ページの (G.21) 式から、$dt = R(t)d\eta$ である。よって、$R(t)$ を大きくすると、dt は大きくなり、周期も大きくなり、光の信号は赤くなる。この**宇宙赤方偏移**は平坦時空中における光のドップラーシフトを、膨張する曲がった宇宙に対して一般化したものである。

質問 18 宇宙全体を見る。図 8 で示唆される予測を続けよう。経線に沿って（$d\phi = 0$）, 位置 O にいる我々のところに直接やってくる光に注目しよう。

A. 宇宙のすべての場所から届く光が我々のところまでくるのにビッグバン後どれだけの時間がかかるのか。その答えを「時間角」η で表せ。

B. A で求めた時刻において宇宙膨張の状態はどうなっているか。

C. ビッグバン後、原始のガスが集まって銀河ができるのに、ある時間が必要だとする。単位球によって表される空間に存在するすべての銀河は A で求めた時刻で見えるだろうか。なぜ見えるのか、またはなぜ見えないのか。

質問 19 いつすべてが見えるようになるか。 閉じたフリードマン宇宙モデルでは、ビッグバン後何 10 億年かければ、全宇宙から届く光を見ることができるのだろうか。質問 18 の B から、これが起きるのは宇宙が最大膨張に達したときである。最大膨張のとき質量密度が臨界密度の 2 倍であると仮定せよ。つまり、臨界密度は 1 立方メートル当たり水素原子が 5 個（実質的に陽子 5 個）あることになるので、この場合、最大膨張で質量密度は 1 立方メートル当たり陽子 10 個に相当する。以下の計算を行う上でこの粗い近似を数値的に正しいものと仮定せよ。

A. 最大膨張の瞬間で、宇宙の特徴的な半径 R を質量パラメータ M で表せ。この瞬間に全宇宙から送られた光が見えているだろう。

B. A の結果と 312 ページの (G.18) 式を使って、最大膨張の瞬間における質量パラメータ M を質量密度 ρ の関数として表せ。

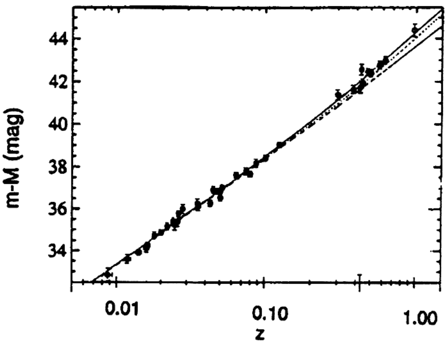
C. 314 ページの (G.29) 式と最大膨張における η の値を使って、この状態で t の式を求めよ。幾何学単位がこの式の両辺で同じであることを確かめよ。

D. 密度の値 ρ_{conv} を通常の単位 キログラム/メートル ^{3} で計算せよ。変換因子 G/c^2 を使って、幾何学単位に変換せよ（38 ページと巻末公式一覧を見よ）。有効数字 1 桁の結果が 1×10^{-53} メートル $^{-2}$ である。有効数字 3 桁まで求めよ。

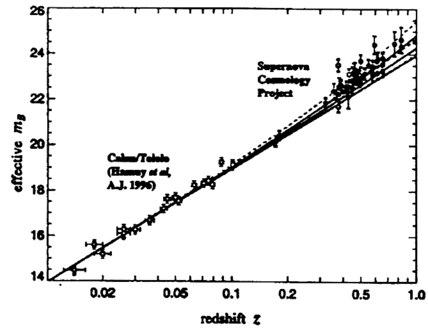
E. B の結果から M の値を求め、D で求めた値を C の t の形に代入せよ。有効数字 1 桁の結果は 2×10^{26} 光進時メートルである。有効数字 3 桁まで求めよ。

F. E の結果を秒に変換し、その次に年（地球の 1 年）にせよ（巻末公式一覧の変換因子を使え）。この宇宙モデル（と最大膨張において仮定した質量密度の値）にしたがって、我々が宇宙全体から届く光を見るのはビッグバン後何 10 億年経ってからか。

宇宙の加速膨張



リース、フェリペンコ、共同研究者の結果



パルマターと共同研究者の結果

宇宙の膨張率は本当に時間とともに加速しているのだろうか。そのことについて2つの別々のグループが結論を出している。一つのグループはリース（Adam Riess）、フェリペンコ（Alexei V. Filippenko）および18人からなり（左側の図）、もう一つのグループはパールマター（S. Perlmutter）と31人で構成されている（右側の図）。

彼らは、いわゆるIa型超新星と呼ばれる、ある種の超新星爆発の光を使った。大きな伴星から物質が白色矮星に徐々に降着すると、白色矮星は不安定になり、超新星として爆発する質量に遂に達しIa型超新星爆発が起きると彼らは信じている。徐々に降着する過程で「ストレスをため込んでいる」状態になり、ほとんど同じ大きさの爆発が引き起こされる。すべての白色矮星の原子核成分が同じならば、原子核の燃焼による絶対輝度は同じになり「標準光源」となるかもしれない。もしそうならば地球から見た超新星の明るさを知ればそこまでの距離がわかり、光の宇宙赤方偏移から、超新星がどれくらい速く後退しているかがわかる。超新星はあまりも明るいので非常に遠い距離にあっても見え、ビッグバンへさかのぼった宇宙の情報をもたらす。

図は縦軸に観測された輝度、横軸に赤方偏移を表している。縦軸のスケールの調整は、観測された輝度を対数で表した**星の等級**で行っている。等級の数値が大きくなると、観測される星は暗くなる（二つのグラフの縦軸のスケールは標準等級だけ異なる。つまり、形を変えることなく、曲線を上下に動かしている）。横軸のスケールも対数で、いわゆる**赤方偏移因子** z で調整されており、z は以下の式で陰に定義される：

$$\lambda_{\text{observed}} \equiv (1+z)\lambda_{\text{emitted}} \tag{G.44}$$

ここで、$\lambda_{\text{observed}}$ は地球で観測された光の波長であり、λ_{emitted} は光源における光の波長である。波長のパターンを調べることで、発光した原子を知ることができ、その結果、発光時の波長がわかる。

この図のデータ点が直線に並べば、膨張速度は距離に比例していることになり、ビッグバンの爆破物の運動を遅くするものがないときに期待される状態になる。しかし、最も遠い超新星（図の右上）のデータ点は直線よりわずかに上にあるようだ。このことから、最も遠い超新星（縦軸の高いところにある）は予想よりもゆっくり遠ざかっていることになる（期待よりも水平に左の方にある）。我々に光が届くまでに長い時間かかるので、ずっと昔の遠くにある超新星の運動を見ていることになる。これはずっと昔の膨張率が今よりも遅かったことを意味するのだろうか。そして、直線からのずれがどれくらい有意であるか。あなた自身で判断してほしい。

膨張率の変化について何を考えようとも、超新星爆発を標準光源として近い距離と少し遠い距離で使うことにより、宇宙の平均膨張率は新しくより洗練された数値になる。リースとフェリペンコと共同研究者らは、宇宙の年齢として $(14.2 \pm 1.7) \times 10^9$ 年を得た。パールマターとその共同研究者は $(15.6 \pm 1.0) \times 10^9$ 年である。

これまでは、閉じた宇宙モデルの予言について説明してきた。残念なことだが、このモデルは現実的ではない。初期宇宙の質量エネルギー密度は輻射と極端に強い圧力に支配されている。その一方で、我々の単純なフリードマンモデルは圧力なしのダストからなっている。さらに、初期宇宙のプラズマスープ（電子と原子核の集合体）の中で、光は絶えず吸収と散乱を受け、まっすぐに進むことができない。これらの効果のために、光はビッグバンから直接届かない。現在、いわゆる**宇宙背景輻射**によって宇宙における最も初期の眺めを見ることができる。宇宙背景輻射は宇宙に満ちており、冷めたスープの中で電子が陽子と結び付いて原子ができる直前の瞬間にその光は放出された。原子の形成で、宇宙は電磁波に対して突然透明になった。これが起きたのはビッグバンから約 30 万年後である。宇宙赤方偏移によって、数千 K から背景輻射の特徴的な温度 3 K 以下に下がっている。

現在、我々のモデルの予言がどのようであっても、初期プラズマの覆いの向こうにあるビッグバンを直接見ることはできない。ニュートリノと重力波は光と違い、プラズマに影響を受けない。ニュートリノや重力波を使った将来の観測により初期プラズマの壁を突き抜け、さらにさかのぼって我々の究極の起源をかいま見せてくれるかもしれない。セラ（Selah）

> 物理学の見解における新しい革命は過去のすべての革命を矮小化してしまうのだが、そういった場合を除いて、どうしたら物理学はその偉大さにふさわしくなれるだろうか。そうなれば、互いに「何と美しく、単純なことなんだろうか。どうしてこれまで気がつかなかったのだろうか」とは言わなくなるだろう。
>
> —ホイーラー

> いつになったら不思議さから解放されるのだろうか。
>
> — ガリレオ（Galileo Galilei）

G.9 参照文献と謝辞

Edmund Bertschinger はこのプロジェクトに対して、非常に重要な提言をしてくれた。

初めの引用 Charles W. Misner, Kip S. Thorne, John Archibald Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman and Company, San Francisco（現在 New York）, 1971, 707 ページ。ホイーラーによってわずかに編集されている。

P. J. E. Peebles, *Principles of Physical Cosmology*, Princeton University Press, 1993.

フリードマンと彼の論文の短い参考文献目録については、Alan H. Guth, *Inflationary Universe,* Helix Books, Addison-Wesley, Reading MA, 1997, ISBN 0-201-32840-2, 41-46 ページを見よ。

ハッブルとフリードマンとその他（とフリードマンモデルに対するアインシュタインの反応の変化）についての原論文の翻訳については、*Cosmological Constants: Papers*

in Modern Cosmology, edited by Jeremy Bernstein and Gerald Feinberg, Columbia University Press, New York, 1986, ISBN 0-231-06376-8 を見よ。

"Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant," Adam G. Riess, Alexei V. Filippenko, Peter Challis, Alejandro Clocchiatti, Alan Diercks, Peter M. Garnavich, Ron L. Gilliland, Craig H. Hogan, Saurabh Jha, Robert P. Kirshner, B. Leibudgut, M. M. Phillips, David Riess, Brian P. Schmidt, Robert A. Schommer, Nicholas B. Suntzeff, and John Tonry, *Astronomical Journal,* Volume 116, 1009–1038 ページ（1998 年 9 月）

"Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae," S. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber, R. A. Knop, P. Nugent, P. G. Castro, S. Deustua, S. Fabro, A. Goodbar, D. E. Groom, I. M. Hook, A. G. Kim, M. Y. Kim, J. C. Lee, N. J. Nunes, R. Pain, C. R. Pennypacker, R. Quimby, C. Lidman, R. S. Ellis, M. Irwin, R. G. McMahon, P. Ruiz-LaPuente, N. Walton, B. Schaefer, B. J. Boyle, A. V. Filippenko, T. Matheson, A. S. Fruchter, N. Panagia, H. J. M. Newberg, W. J. Couch, *Astrophysical Journal,* Volume 517, Number 2, 565–586 ページ（1999）．

「セラ（Selah）」は聖書の詩篇で多く見受けられる。正確な意味はよくわからない。我々が好んでいる定義は、1539 年の *Bucer* の詩篇からのものである。"This word Selah signifyeth ye sentence before to be pond'red with a depe affecte, long to be rested upon and the voyce there to be exalted." *Oxford English Dictionary,* 2nd edition, Clarendon Press, Oxford, 1989.

最後の引用は John Archibald Wheeler, "On Recognizing 'Law Without Law', "*American Journal of Physics*, Volume 51, 398–404 ページ（1983）．

一般相対論の読み物

一般書

Black Holes and Time Warps: Einstein's Outrageous Legacy, Kip S. Thorne, W. W. Norton & Co., New York, 1994, ISBN 0-393-31276-3. この本の前付で述べたように、我々の好みの書き方。（日本語訳：『ブラックホールと時空の歪み』林一／塚原周信訳、白揚社）

Black Holes, J.-P. Luminet, Cambridge University Press, 1992, ISBN 0-521-40906-3. すばらしく、そして短い本。Thorne の本と似ているが、人物についての記述がない。

Relativity:The Special and General Theory, Albert Einstein, Crown Publishers, New York, 1961, ISBN 0-517-025302. 古老の先生自身による一般書。物理の深さについて楽しめるし、人間味あふれる視点、それに、スタイルは古いがそれなりの力強さが味わえる。原本は 1916 年に出版された。（類書の日本語訳：『特殊および一般相対性理論について』 金子務訳、白揚社）

Was Einstein Right? Putting General Relativity to the Test, Second Edition, Clifford M. Will, Basic Books/Perseus Group, New York, 1993, ISBN 0-465-0986-9. アインシュタインの理論の実験的観測的検証の丁寧な説明。美しく魅力ある筆使い。

A Journey into Gravity and Spacetime, John Archibald Wheeler, Scientific American Library, New York, 1990, W. H. Freeman and Company により解版。ISBN 0-7167-5016-3. （日本語訳：『時間・空間・重力 — 相対論的世界への旅—』 戎崎俊一訳、東京化学同人）本書の著者の一人がアインシュタイン方程式の物理的基礎とその内なる作用、驚くべき予言を解きほぐす。

Gravity's Fatal Attraction: Black Holes in the Universe, Mitchell Begelman, and Martin Rees, Scientific American Library, New York, 1996, W.H. Freeman and Company により解版。ISBN 1040-3213, ISBN 0-7187-5074-0. 華やかな図解入りで芸術的に書かれた本で、宇宙物理の最新のトピックスがたくさんある。

Black Holes and Baby Universes and Other Essays, Stephan Hawking, New York, Bantam Books, 1993, ISBN 0-553-09523-4. 我々の時代の一般相対論研究のおそらく第一人者である人物による自伝であり、科学の一般書であり、概論である。（日本語訳：『ホーキングの最新宇宙論—ブラックホールからベビーユニバースへ』佐藤 勝彦訳、日本放送出版協会）

General Relativity from A to B, Robert Geroch, University of Chicago Press, 1978,

ISBN 0-226-28864-1. 時空のアイディアを発展させ、1 人の観測者から始まってブラックホールで終わる。

Geons, Black Holes, and Quantum Foam:A Life in Physics, John Archibald Wheeler with Kenneth Ford, W. W. Norton & Company, 1998, ISBN 0-393-04642-7. 本書の著者の一人の自叙伝。一般相対論への彼の貢献もある。

論文集

The Principle of Relativity, A. Einstein, H. A. Lorentz, H. Wely, H. Minkowski, Dover Publications, Inc., New York, 1952, Standard Book Number 486-60081-5. 特殊相対論と一般相対論の原論文をたくさん翻訳して集めたもの。安価であるがすばらしい。

Black Holes, Selected Reprints, edited by Steven Detweiler, American Association of Physics Teachers, 1982. ISBN はない。ここには、Michell, Schwarzschild, Oppenheimer, Snyder, Kerr, Boyer, Lindquist らによる古典的なブラックホールの論文がある。残念なことに絶版になっているが、図書館を探せばあるかもしれない。

一般相対論の入門書

Gravity from the Ground Up, Bernard Schutz, Cambridge University Press, 2003, ISBN 0-521-45506-5. 相対論の実験および観測結果に加えその解釈を美しく贅沢なイラスト付きで包括的に説明していく。この本の最初の半分で古典物理を修正しながら相対論を少しずつ説明する。我々の宇宙の博識、強力なモデル、公平な判断のための大いなる資料である。テンソルを使わない。

Flat and Curved Space-Times, George F. R. Ellis and Ruth M. Williams, Clarendon Press, Oxford, 1988, ISBN 0-19-851169-8. ゆっくりと実り多い特殊相対論の旅行に引き続き、曲がった時空とシュワルツシルト計量、簡単な宇宙論モデルがある。テンソルは使わないが、付録にある。

注：以下の本はすべて入門書だがテンソルを使う。

Gravity, An Introduction to Einstein's General Relativity, James B. Hartle, Addison Wesley, 2003, ISBN 0-8053-8662-9.
一般相対論とその成果についてこの分野では世界的な専門家によるみごとな教科書。現代的で十分形式が整えられている。本書を読破した後の勉強に適している。

Relativity: Special, General, and Cosmological, Wolfgang Rindler, Oxford University Press, 2001, ISBN 0-19-850836-0.
相対論用教科書の著者の中の長老によって、最も適した時期に書かれた本。すべての題材が吟味され説明されている。

A First Course in General Relativity, Bernard Schutz, Cambridge University Press, 1985（訂正を加えて 1999 に重版）, *Gravity from the Ground Up* の著者による、より形式的な一般相対論の入門書。数学と実験、威厳ある概論が密接に関連づいている。（日本語訳：『シュッツ相対論入門 上・下』江里口良治／二間瀬敏史訳、丸善）

General Relativity, I. R. Kenyon, Oxford University Press, New York, 1990, ISBN 0-19-851996-6. 入門書の中でもかなり短いが、実験と観測から物理的な動機づけがよくされている。

一般相対論と宇宙論の上級の教科書

Gravitation, Charles W. Misner, Kip S. Thorne and John Archibald Wheeler, W. H. Freeman and Company, San Francisco（現在 New York）, 1973, ISBN 0-7167-03440-0. 愛すべき「電話帳」であり、ほとんどマンハッタンの電話帳といってもよい厚さで、あらゆる一般相対論研究者の心の友である。明確で包括的で完全な教科書。幾何学的な視点から一般相対論の 1970 年代でのほとんどの要点を取り扱っている。

Gravitation and Spacetime, Second Edition, Hans C. Ohanian and Remo Ruffini, W. W. Norton & Co., New York, 1994, ISBN 0-393-96501-5. たくさんの実験を含んだ物理的なアプローチをしている。一般相対論の（弱い重力場の）線形近似から始め、応用として必要になるにつれて、徐々に幾何学的形式へとつながっていく。

Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars, Stuart L. Shapiro and Saul A. Teukolsky, John Wiley, New York, 1983, ISBN 0-471-87316-0. 密度の高い天体は何からできているか、そしてどうやってできたのかを丁寧に扱っている。自転するブラックホールおよび自転していないブラックホールを回る粒子と光の軌道についてよく書かれている。

General Relativity, Robert M. Wald, University of Chicago Press, 1984, ISBN 0-226-87033-2. 始めから一般相対論の数学的扱いを全開にしている。包括的であり学べることが豊富。最後の章に強い重力場での量子効果がある。

General Theory of Relativity, P. A. M. Dirac, Princeton University Press, 1975, ISBN 0-691-01146-X. すごい。丁寧な導入と、少なめであるがほどよい内容で、たった 0.5 センチメートルの厚さ。ディラックの伝説的な切り詰めた明快さは相対論の絶対的な核心を必要とする人のためのものである。（日本語訳：『一般相対性

理論』江沢洋訳、東京図書)

Gravitation and Cosmology, Steven Weinberg, John Wiley, New York, 1972, ISBN 0-471-92567-5. 一般相対論のほとんどの教科書が幾何学的な側面を強調する。Weinberg の本は一般相対論の幾何学的概念が最小に抑えられた解析的書である。

Principles of Physical Cosmology, P. J. E. Peebles, Princeton University Press, 1993, ISBN 0-691-01933-9. 宇宙について隅々まで、宇宙の成分を中心として書かれており、宇宙論が始まったときのことから現代的な発展についても書かれている。

Cosmological Physics, John A. Peacock, Cambridge University Press, 1999, ISBN 0-521-42270-1. 高等な教科書のうちで最新で、最近の宇宙物理学的観測結果を理解するのに必要とする程度の一般相対論と量子場の理論がともに書かれている。この本で数学を準備として勉強しようとするとき、最近の発展についての物理的洞察が多く見つかる。

趣向の変わった、おもしろい本

Relativity Visualized, Lewis Carroll Epstein, Insight Press, San Francisco, 1997, ISBN 0-953218-05-X. 特殊相対論と一般相対論に、楽しく趣向の変わった表現方法を用いている。主に図とグラフィックで表されている。書店で、または$19.95 に手数料 $2 を Insight Press 614 Vermont Street, San Francisco に送れば手に入る。

Faster Than Light: Superluminal Loopholes in Physics, Nick Herbert, New American Library, a Division of Penguin Books, Markham, Ontario, 1988, ISBN 0-452-26317-4. Herbert は、どうやったら光よりも速く進めるか（よって時間を遡るか）を理解するために平坦と曲がった時空で彼の考えうるあらゆるトリックを試す。それが成功するかどうかを自分で判断せよ。

Time Machines: Time Travel in Physics, Metaphysics, and Science Fiction, Paul J. Nahin, American Institute of Physics, New York, 1993, ISBN 0-88318-935-6. Nahin は時間旅行の SF を幅広く参考にして、時間旅行についての現代的な思索を繰り広げる。付録にある解き方のノートは理論について深く掘り下げている。すばらしい本。

記号と用語集

記号

この本では単位を略記していない。例えば、メートルと秒はそのまま書かれており、記号 m は常に質量を表し、s はいつも空間距離を表している。略記についての唯一の例外は添字である。例えば、添字 conv は通常の単位 “conventional units” を意味する。

ギリシャ文字

γ （ガンマ）：特殊相対論の伸びの因子 $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$. 単位なし。112 ページ。

η （エータ）：閉じた宇宙のフリードマンモデルの「宇宙車輪」の回転角（時間パラメータ）。単位なし。313 ページ、320 ページ、323 ページ。

θ （シータ）：(1) 球殻上の 1 点を通る半径方向外向きの線を基準にして測定された角度（175 ページ、213 ページ、219 ページ、224 ページ）。(2) 閉じたフリードマン宇宙モデルを表す単位円に沿った弧の長さと角度。(319–323 ページ）単位なし。

ρ （ロー）：宇宙の平均密度。単位：メートル/メートル ^{3} = メートル $^{-2}$。312–312 ページ。

σ （シグマ）：2 つの事象間の固有距離。単位：メートル。4 ページ。

$d\sigma$（「ディーシグマ」）：2 つの近接する事象間の固有距離の増分。単位：メートル。43 ページ

τ （タウ）：2 つの事象間の腕時計時間（固有時）。単位：メートル。2 ページ。

$d\tau$（「ディータウ」）：2 つの近接する事象間の腕時計時間（固有時）の増分。単位：メートル。41 ページ、42 ページ、273 ページ。

ϕ （ファイ）：重力中心を通る平面で測られる角度。ϕ は一般相対論でもユークリッド幾何学と同じ意味である。単位なし。40 ページ。

ψ （プサイ）：観測者が入射光を見るために向く角度。147–149 ページ。

ω （オメガ）：(1) ある観測者にしたがって中心周りの回転の角度変化率。単位：ラジアン/秒。(195 ページ）(2) 水星の半径方向における調和振動の角速度。単位：ラジアン/秒。(194 ページ）(3) 自転するブラックホールの周りのリングライダー（ゼロ角運動量観測者 (zero angular momentum observers) または ZAMOs）の角度回転率であり、遠方観測者によって計算される。単位：メートル $^{-1}$。(287 ページ)。

$\Omega = M/M_{\mathrm{crit}}$：（大文字のオメガ）その値でフリードマン宇宙を区別するパラメータ。M は宇宙の質量パラメータで、M_{crit} は平坦空間宇宙となる臨界値である。単位なし。317–318 ページ。

ローマ字

$a = J/M$：自転するブラックホールの質量に対する角運動量の比。単位：メートル。272 ページ。

b：中心付近の物体の衝突パラメータ。単位メートル。158 ページ、209 ページ。

c：光の速さ。平坦時空で一定の値をもつと定義される。単位はメートル毎秒。3 ページ。

dl：フリードマン宇宙モデルの計量で使われる距離の 4 次元増分。単位メートル。308 ページ。

dr：半径間隔の増分。ここで、r はユークリッド半径かもしれないし、換算円周 (31–36 ページ) かもしれないし、ボイヤ-リンキスト半径 (273 ページ) かもしれない。単位：メートル。

dt：遠方観測者が測る 2 つの近接する事象の時間間隔。単位：メートル。42 ページ、273 ページ。

E：粒子エネルギー。特殊相対論では $E = mdt/d\tau$ (11 ページ) となる。一般相対論では無限遠で測られるエネルギー (98 ページ、284 ページ)。単位：典型的に、無次元量 E/m を使い、読者が望めば、質量と同じならば、どんな単位も使える (11 ページ、98 ページ)。

g：局所的重力加速度で、通常の単位メートル/秒^2 で表すときには $g_{\rm conv}$ とし、幾何学単位 メートル$^{-1}$ では g と表す。70 ページ、121 ページ、145–145 ページ。

h：プランク定数。単位：ジュール-秒。236 ページ。

J：自転するブラックホールの角運動量。単位：メートル^2。272 ページ。

k：フリードマン宇宙モデルで、閉じた宇宙 ($k = 1$)、平坦な宇宙 ($k = 0$)、開いた宇宙 ($k = -1$) を区別するために使われるパラメータ。単位なし。310 ページ。

$k_{\rm B}$：ボルツマン定数。単位、ジュール/ケルビン。229 ページ。

$L = mr^2 d\phi/d\tau$：引力中心の周りの粒子の角運動量。単位：キログラム-メートル。155 ページ。

$L^* = L/(mM)$：ここで m は軌道運動する物体の質量で、M は引力中心の質量である。単位のない角運動量の測定量。182 ページ。

m：テスト粒子の質量。単位：キログラムまたは、読者の望みの単位を選べる (E の定義を見よ)。13-14 ページ。

M：(1) 重力中心の質量 (37-39 ページ)。(2) 宇宙の質量パラメータ。(317 ページ) 単位：メートル。

$M_{\rm crit}$：宇宙の平坦フリードマンモデルの「臨界」質量パラメータ。単位：メートル。317 ページ。

$p = mds/d\tau$：特殊相対論における運動量。ふつう我々は p/m を使い、質量 m と同じ単位である限り、運動量としてどんな単位でも使えるようにしている。13 ページ。

r：(1) ユークリッド幾何学では中心から測った半径。(2) シュワルツシルト時空では換算円周 (31–36 ペー

ジ、133 ページ)。

$r^* = r/M$：ここで M は引力中心の質量。換算円周の無単位量。142 ページ、182 ページ。

R：(1) 太陽の半径 (244 ページ、265 ページ) (2) カー時空の換算円周 (277 ページ、282 ページ、289 ページ)。(3) 宇宙の半径 (309 ページ)。

s：基準系における 2 つの事象間の空間（座標）間隔。単位：メートル、(2 ページ)

t：特殊相対論における座標時間（2 ページ)。シュワルツシルト時空 (51–54 ページ）とカー時空 (273–273 ページ）における遠方時間。単位：メートル。

$t^* = t/M$：ここで M は引力中心の質量である。遠方時間の無単位測定量。142 ページ。

U：水星の軌道を相対論的に分析するときに使う有効ポテンシャル。単位：キログラム。196 ページ。

v：ある基準系で測ったときの速さ (光が 1 メートル進む時間当たりの距離のメートル、つまり光速との比)。単位なし。3 ページ。

V：軌道運動する粒子または光の有効ポテンシャル。単位：メートル。165 ページ､171 ページ､214 ページ。

$V^* = V/m$：ここで m は軌道運動する物体の質量である。単位をもたない有効ポテンシャル。182 ページ。

w：フリードマン宇宙モデルにおける 4 番目の空間の次元。単位：メートル。309 ページ。

z：宇宙赤方偏移因子。単位なし。324 ページ。

語句

ブラウン（Peter M. Brown）著

理論と実験、観測、定義はこの世の中に同時に生まれる。したがって、定義は単独では意味をなさず、しばしばどうどうめぐりとなるようだ。この用語集の目的は物理の内容を教えることではなく、物理の実験を記述する言葉を明確にすることにある。ここでは、本書の筋で中心となる便利な用語を取り上げる。それ以外の語句、例えばホーキング輻射や ZAMOs については索引をみてほしい。

アインシュタインリング： 遠い光源の光が途中にある天体の周りで曲げられてできる円状の像。227 ページ、251–253 ページ。

雨粒系： 遠方で静止状態からブラックホールへ向けて自由落下する時計と物体にもとづく座標系。128–131 ページ。

一般相対論： 質量と圧力の存在によって生じる時空曲率を記述するアインシュタインの重力理論。一般相対論は曲がった時空中でテスト粒子の運動や重力波、宇宙の構造とその時間発展も記述することができる（1 ページ、プロジェクト G)。一般相対論は古典論で、量子効果を記述できない。重力の量子理論はまだ存在していない（48 ページ)。

宇宙、閉じた—： この本では、膨張した後ビッグクランチに収縮するフリードマン宇宙のことをいう。プロジェクト G。

宇宙、開いた—： この本では、時間経過の無限大の極限で膨張率が一定になる宇宙のことをいう。316–319 ページ。

宇宙、フリードマン—： 圧力0で一様なダストからなる宇宙を理想化したモデル。プロジェクト G。

宇宙、平坦な—： この本では、時間経過の無限大の極限で膨張率がゼロになる宇宙のことをいう。316–319 ページ。

宇宙原理： 宇宙は一様かつ等方であるとする仮定のことで、多くの宇宙モデルで採用されている。言い替えると、宇宙はどこに行っても、どの方向を向いても同じように見える。306 ページ。

腕時計時間： 2 つの事象間の腕時計時間という語はこの本では 2 つの関連しあう方法で使われる。(1) 固有時 τ として、2 つの事象間のあらゆる可能な世界線に沿って運ばれる時計によって記録される（加齢する）全時間である。この 2 つの事象は必ずしも近い必要はない（88–92 ページ）。(2) 時間的な時空間隔として、2 つの近い事象間の時間の増加 $d\tau$ で、測地線に沿って運動する時計によって記録される（1 ページ）。光のフラッシュの世界線に沿った腕時計時間は 0 である（204–208 ページ）。

埋め込み図： 2 次元の図のことで、曲がった空間幾何学を視覚化してわかりやすくしている。50 ページ。

運動量（線形運動量）： この本では、特殊相対論の線形運動量 p を使う。それは自由浮遊系では $p = mds/d\tau$ で定義される。ds は自由浮遊系において進んだ距離であり、$d\tau$ はその距離を移動する粒子によって運ばれる腕時計で記録したときの時間である。12 ページ。

エネルギー： この本では*エネルギー*という言葉を 2 通りの意味で使っている。一つは特殊相対論的な意味、もう一つは無限遠のエネルギーと呼ばれる一般相対論的な意味である。単位：比 E/m でエネルギーを書く。これにより、エネルギー E と質量 m の単位が同じなら好みに応じて単位を使うことができる（7-12 ページ）。例えば、分子と分母がキログラムで、または 100 万電子ボルトまたはジュール（11 ページ、96 ページ）。

特殊相対論でのエネルギー： 自由浮遊系で粒子エネルギーは $E/m = dt/d\tau$ によって定義される。ここで、dt は粒子の軌道上で互いに近い 2 つの事象間の局所時間であり、$d\tau$ は同じ 2 つの事象間の粒子の腕時計時間である。シュワルツシルト時空中で球殻観測者は、エネルギーの局所的な測定で特殊相対論の式を使う（103–105 ページ）。

一般相対論でのエネルギー： 自由粒子のエネルギーは、粒子が軌道運動したり、重力中心に突っ込むときの運動の定数である。テスト粒子のエネルギーは原理的に、結合系（テスト粒子＋重力中心）の質量から測定される（93–96 ページ）。遠方の人工衛星に及ぼされる重力の引力か

ら、重力中心単独の質量を引くことで得られる。97 ページの図 4 を見よ。エネルギーの公式は、自転しないブラックホール付近の粒子 (96 ページ) と自転するブラックホール付近の粒子 (284 ページ) では違う。

エルゴ球： 自転するブラックホール周辺の定常限界と地平線の間の領域 (278 ページ)。エルゴ球はペンローズのエネルギー取り出し過程が使える領域である (292–297 ページ、299–301 ページ)。

遠方時間： (天体暦、t 座標) 重力中心から離れ、静止した時計によって測られる時間 t. 43 ページ、51–54 ページ、273 ページ。

カー計量： 自転し、帯電しない重力中心周辺の時空を記述する計量。273 ページ、276 ページ。

角運動量： 自転する引力中心としない引力中心で運動するテスト粒子の角度方向に関する第二の運動の定数。我々は一般的に角運動量と質量の比の形で使う。単位はメートル。154–156 ページ、284 ページ。

角運動量パラメータ $a = J/M$**：** 自転するブラックホールの質量に対する角運動量の比。単位：メートル。272 ページ。

加齢： 2 つの事象間の世界線に沿って動く物体の腕時計で記録される経過時間 (固有時)。5 ページ、88 ページ。

換算円周： 事象または物体の半径位置 r のことである。回転していない引力中心の近くで、r の値を求めるためには、事象または物体を通り引力中心を中心とする大円の円周を測定し、2π で割ればよい (31–36 ページ)。地平線内では r を測定する方法が別に必要となる (133 ページ)。自転する引力中心の近くで、換算円周 R は自転していないリング上 (287 ページ、280 ページ、282 ページ) または、角運動量 0 で自由に回転しているリング上で測定される (290 ページ)。

慣性系： 自由浮遊系を見よ。

慣性系の引きずり： 自転するブラックホールの回転方向に流されないように、ロケットを接線方向に (半径方向も同様に) 噴射させることを要請する現象。277–280 ページ。テスト粒子は角運動量が 0 のままで自転するブラックホールを回ることができる。284–286 ページ。

観測者： 基準系のものさしと記録用時計の集まり。17–19 ページ、59 ページ、61 ページ。

幾何学単位： いろんな物理量の測定量に使われるメートルの単位。以下のような量に使われる：時間 t (3 ページ)、引力中心の質量 M (37 ページ)、軌道回転する粒子の単位質量当たりの角運動量 L/m (159 ページ)、自転するブラックホールの単位質量当たりの角運動量 J/M (272 ページ)、電荷 Q (303 ページ)。

基準時計： 自由浮遊系において、他のすべての時計と同期化するために使われる時計。18 ページ。

既約質量： 自転するブラックホールの回転エネルギーすべてを取り去るか、

消失してしまったときの質量。297ページ。

球殻： シュワルツシルト時空において、引力中心を同心とする格子状定常球面の集合体（34ページ）。カー時空では赤道面の回転しないリングに使う言葉（284ページ）。

極値的加齢の原理： 2つの事象を通る自由な物体の世界線は、その腕時計の記録する時間経過が極大または極小（極値）をとる。5–7ページ、87–92ページ、92ページ。

曲率因子： この本でシュワルツシルト計量の中で dt^2 の項の係数や dr^2 の項の分数として現れる因子 $(1-2M/r)$. 45ページ。

記録係座標： 遠方の観測者によって記録される事象の3つの座標：r 座標、方位角 ϕ, 遠方時間 t. r 座標はカー時空とシュワルツシルト時空（31-36ページ、273- 289ページ）では意味合いが違う。**ボイヤ-リンキスト座標**と**換算円周**も見よ。

記録時計： 時計の格子の集まり全体。その各々が、その近くで起きたあらゆる事象の時刻と空間位置、性質を記録する。18ページ、61ページ。

クエーサー： 極端に明るい光源で、輻射を放出する降着円盤を持つ自転ブラックホールと考えられている。274ページ、296–299ページ。

計量： 計量は、時間的（または空間的）な形式では、2つの近接する事象間の固有時（または固有距離）を座標距離の増分で表した式である。3, 4, 42–48, 57, 137–138, 273, 276, 310, 311, 320ページ。

光速： 空間と時間を同じ単位で表すために（3ページ）、またはキログラムの質量をメートルで表すために（38ページ）使う変換因子。曲がった時空では光速の値は変わる（204–207ページ、209–212ページ、プロジェクトE)。

降着円盤： 自転するブラックホールの周りを渦巻く物質の円盤。272ページ、274ページ、297ページ。

固有距離： 2つの事象が同時に（4ページ、45ページ）起きる系で測られる2つの事象間距離。球殻間の測定距離（45ページ、68ページ）。

固有時： **腕時計時間**を見よ。

固有長さ： 物体が静止している座標系の中でのその物体の長さ。4ページ。

最大極限カーブラックホール： 最大の角運動量で自転するブラックホール 276- 277ページ。

座標距離： 基準系の観測者が測定する時空中の2つの事象間の距離。2ページ。

座標時間： 基準系の観測者が測定する2つの事象間の時間。2ページ。

座標半径： **換算円周**を見よ。

時間、腕時計—： **腕時計時間**を見よ。

時間、固有—： **腕時計時間**を見よ。

時空： 事象が起きる舞台。定常状態の構造周辺で時空の幾何学は計量で表される。25ページ。

時空間隔： 時間的な時空間隔と空間的時空間隔の総称。5ページ。

時空曲率： 自由なテスト粒子間の潮汐加速度（相対加速度）によって存在が確認される時空の性質。16ページ、

29 ページ。

事象： ある瞬間の空間の位置。つまり、時空の一点。爆竹の破裂が事象の一例である。破裂は空間と時間の位置をともに固定する。2 ページ。

事象の地平線： **地平線**を見よ。

質量： 特殊相対論では、エネルギー E と線形運動量 p を関係式 $m^2 = E^2 - p^2$ で関係づける不変な性質 (13–14 ページ)。一般相対論では、テスト粒子の質量が特殊相対論で得られるものと等しく、小さいため、その近傍の時空に与える影響が無視できると仮定している。本書では、m の単位はエネルギーの単位 E と等しくしてあるので、読者が好きに選んでよく、比 E/m には単位がない。天体の質量 M がかなり大きくなると、その周りの時空は大きく曲がる。M の値は遠い軌道上の灯台の運動を通じて測定することができる（97 ページの 図 4)。本書では天体の質量 M はメートルの単位で測られる（37–39 ページ)。**質量パラメータ**も見よ。

質量パラメータ、宇宙の 宇宙の物質量を特徴づける量 M。フリードマンモデル（プロジェクト G）では質量パラメータは、半径 R の球のユークリッド体積をダストの局所密度にかけたものに等しい（空間を通じて一様と仮定)。R は宇宙の半径である。単位：メートル。312 ページ。

自由浮遊系： （慣性系）一般的に、初め静止している自由なテスト粒子が静止したままである基準系。より専門的に表せば、実験目的に対してテスト粒子の相対（潮汐）加速度が無視できる基準系である。14–16 ページ、28–31 ページ。

重力： 時空における質量-エネルギーの効果であり、自由テスト粒子間の相対加速度または潮汐加速度で存在を知ることができる。14–17 ページ、29 ページ。

重力青方偏移： 重力中心に向かうにつれて起きる光の周期の減少。2.5 ページ、2.11 ページ。

重力赤方偏移： 重力中心から離れるにつれて起きる光の周期の増加。2.5-2.5 ページ。

シュワルツシルト球： （シュワルツシルト面、シュワルツシルト地平線、事象の地平線、地平線）シュワルツシルトブラックホールの地平線。2.9 ページ。

シュワルツシルト記録係： シュワルツシルト座標 r, ϕ, t を使って、事象を記録する記録係。59 ページ。**シュワルツシルト格子**も見よ。

シュワルツシルト計量： 帯電せず回転していない球対称物体の周りの時空を表す計量。42–48 ページ。

シュワルツシルト格子： 遠方時間の読みと球殻の番号や位置などの集まりで、シュワルツシルトブラックホールの地平線外のどんな事象でもすぐそばのシュワルツシルト座標 r, ϕ, t を読み出すことができる。61 ページ。

シュワルツシルト地図： シュワルツシルト座標 r, ϕ, t で表された事象と軌跡をプロットした図。161 ページ、216–221 ページ。

シュワルツシルト半径： 帯電も自転もしていない球対称物体の地平線の半径（換算円周）$r = 2M$。31–36 ページ、44–46 ページ。

青方偏移： 重力青方偏移を見よ。

世界線： (1) 粒子またはフラッシュ光が通る時空内の経路。(2) 粒子またはフラッシュ光の運動を表す時空図上の曲線。粒子が自由ならば、その世界線は測地線である（9 ページ、88 ページ）。

赤道面： 自転するブラックホールの中心と赤道を通る平面 (277 ページ)。自転しないブラックホールでは、対称性によって中心を通る「赤道」面はどんな方向でも向くことができる (40–40 ページ)。

赤方偏移： 重力赤方偏移を見よ。

全地球測位システム（GPS）： 軌道上にある人工衛星の原子時計から時間合わせの信号を特別な受信機へ送ることによって地上の位置を特定するシステム。プロジェクト A。

測地線： 時空中で自由粒子のしたがう世界線。28 ページ、91 ページ。

地平線： ブラックホールを取り囲む片道通行の面で、あらゆるものが地平線を通って内側に入ってもよいが、どんなものも、光でさえも外側へ通り抜けられないという性質で定義される。44 ページ、139– 141 ページ、237 ページ、275 ページ。

潮汐加速度： 基準系の異なった部分に置かれた 2 つの自由テスト粒子間の相対加速度。潮汐加速度は重力と時空曲率が存在することの証である。潮汐加速度が実験結果に影響を及ぼすとき、その実験では自由浮遊（慣性）系を定義することができず、一般相対論を使わなければならない。16 ページ、29 ページ。

定常限界： 自転するブラックホールを囲む面のうちで、空間の引きずりが強すぎてすべてのものが回転の方向に流されるもの。定常限界で光を回転方向と逆に発射すると光は止まったままである。277–280 ページ。

同時： 基準系内で同じ時刻に記録されたできごと。4 ページ。

特殊相対論： 自由浮遊系で物理法則を表したり、互いに一様な相対運動をする自由浮遊 (慣性) 系が重なったところで観測を比較する物理の分野。特殊相対論は光と粒子の実験結果を正しく予測できる。特殊相対論は重力中心の周りの広い領域全体で生じる現象を分析することはできない。このような広い領域を覆えるたった一つの自由浮遊系が定義できないからだ。このような現象を正しく記述するためには一般相対論を使わなければならない。1 ページ、14 ページ。

時計の同期化 基準系の時計が基準時計と同じ時間になるように設定する過程。18 ページ、311 ページ、316 ページ。

速さ： 基準系内の粒子が進む座標距離 s を座標時間 t で割ったもの。つまり $v = s/t$. この本では s と t を同じ単位で測定するため、v には単位がなく、光速との比として表している

(3 ページ)。

パルサー： 回転しながら輻射のサーチライトビームを放射する中性子星。272 ページ。

不変量： 基準系によらない値をとる あらゆる物理量の性質。3 ページ、13 ページ。

ブラックホール： この本では、地平線を持ち、遠くで平坦時空に囲まれているあらゆる構造。

フリードマン宇宙： 宇宙を圧力ゼロで一様密度のダストから構成されていると理想化するモデル。プロジェクト G。

平坦時空： 自由浮遊(慣性)基準系を設置することが可能な時空の領域。14–16 ページ、28 – 31 ページ。

ペンローズ過程： 自転するブラックホールからエネルギーを取り出すために提案された過程。292–297 ページ、299–301 ページ。

ボイヤ-リンキスト座標系： (カー座標系) 自転し帯電しないブラックホール周辺の事象に対する 3 つの座標 r, 方位角 ϕ, 遠方時間 t。ボイヤ-リンキスト座標の ϕ と t はシュワルツシルト座標と同じであるが、半径座標 r は違った意味をもつ。(273 ページ、289 ページ)

方位角： 平面内で事象の位置を (半径と時間とともに) 特定する角度 ϕ。方位角は一般相対論でもユークリッド幾何学と同じ意味をもつ。40 ページ。

ポテンシャル、有効： 有効ポテンシャルを見よ。

マイクロレンズ効果： 遠い星または銀河からの光が観測者と遠い天体の間にある物体の重力によって焦点を結ぶこと。253–254 ページ。

有効ポテンシャル： 半径方向の運動で軌道を分析するために使われる表現。164–173 ページ、196–197 ページ、212–215 ページ。

量子重力： 一般相対論と量子力学を統合するであろう未完成の理論。48 ページ、130 ページ。

臨界質量： フリードマンモデルにしたがうと、宇宙の質量パラメータが臨界値 M_{crit} ならば、宇宙の半径の変化率は時間無限大の極限でゼロになる。317 ページ。

リング、リングライダー、リング座標： これらの語は回転するブラックホールの赤道面で同心円のリングの集合のことを言う。その各々のリングの角運動量はゼロで、ブラックホールの周りを螺旋運動する「現在の空間」に対して静止している。287-290 ページ。

conv： 添字の意味は「通常の単位で」である。13 ページ。

r 座標： **換算円周**を見よ。

索 引

訳者あとがき

本書『一般相対性理論入門』は、原著の書名"*Exploring Black Holes, Introduction to General Relativity*"の通り、ブラックホールを中心とした一般相対性理論の教科書となっている。テンソル計算などの特殊な数学を避けながら本質を突いているので、学部 3,4 年生から特殊相対論をマスターした社会人まで幅広く楽しんでもらえると思う。

一般相対論を学習する上で問題となるのは、その本質的な概念にたどり着く前に、数式の変形を嫌というほどやらされることだ。クリッストフェル記号に始まって、曲率テンソル、リッチテンソル、スカラーテンソルなど曲率と関係しているようだがあまりピントこないものがずらりと現れる。そのため、物理学科の学部生が独習しようとしても、数学の敷居が高くてなかなか順調に読み進めるものではない。私自身、挫折した経験が少なからずある。

それでも何とか数式の山を乗り切れば少し物理が見え始める。実際、一般相対論の本質を一言で言ってしまえば、本書の中心的な考え「時空は質量にどのように動くべきか教え、質量は時空にどのように曲がるべきか教える」なのである。シンプルといえばシンプルである。だが、その次に待ち受けているのはアインシュタイン方程式の解法である。またまた、数時間、数日かけないと、そして運がないと、たどり着けないような代物である。計算ばかりやっていると、何を計算しているのかが自分でも分からなくなってくる。結局何もわからない、何も身につかなかった。そして残るのは、計算用紙の山と、途中まで手垢で汚れた教科書だけということになる。

しかし、本書ではそうした苦労を避けるため、難しい数学をきれいに切り捨て、気持ちよいほどすっきりとしたスタイルにまとめている。計量の意味を理解していれば、本書の内容はすんなりと理解できるのではないかと思う。計量はそれなりに深い意味を持った量なので難しいところもあるが、本書で丁寧に説明されているから、特殊相対論の知識があれば読み進められると思う。

物理の内容だけでも面白いのだが、著者らはいろんな工夫をして、読者を楽しませてくれる。ブラックホールの探査チームへのインタビュー、最近では相対論の本でよく書かれるようになった GPS における相対論の役割など、読んでいて飽きない。こういったスタイルは本書独特のものというよりも、著者らのスタイルである。本書は同著者による特殊相対論の教科書 "*Spacetime Physics*" の続編として位置づけられている。第 1 章では "*Spacetime Physics*" を頻繁に引用しているし、考える反論者と鳥の問答といったスタイルは引き継がれている。ローレンツ変換を使わずに、特殊相対論を述べるという独特で本質を突くスタイルは、本書のアインシュタインの場の方程式を使わずに、ブラックホールを記述するというスタイルに踏襲されている。"*Spacetime Physics*, second edition" の一読を勧めたい。

著者のテイラー先生は、日本では *Spacetime Physics* の初版の翻訳や『量子力学入門—MIT 物理』（培風館）の著者としてご存知の方もいるだろう。物理学の優秀な教師としての評価の高い方である。一方のホイーラー先生は、原子物理学から宇宙論まで幅広く手がけられた方で、彼の学生の中にはファインマンやソーンなど、そうそうたる人がいる。すでに彼については自伝も含めて、いろんな書物が出版されているので、そちらにあたってもらいたい。例えば、本文で何回も参照されている “*Black Holes and Time Warps*” では、ソーンは、師のことを尊敬と批判とを隠すことなく客観的に描いており、非常におもしろい。また、自伝の “*Geons, Black Holes, and Quantum Foam*” には、本書の執筆のいきさつが述べてある。

テイラー教授のホームページ `http://www.eftaylor.com` では、原書における誤植等や内容の間違いが訂正されるなど、頻繁に更新されている。増刷されるたびに原書にも反映されている。この状況は本文 290 ページのボックスの内容からもわかると思う。日本語訳は翻訳時最新であった原書第 6 刷に基づいている。原書の訂正箇所についてはテイラー教授から直接指摘があった。テイラー教授に感謝する。

最後に、多忙の中、英語、その他の引用文について相談にのってくれた大分工業高等専門学校 篠田和男先生、原稿を読んでコメントをくれた川野立君、編集作業で御世話になった藤村行俊氏に感謝する。

公式集

シュワルツシルト計量は、回転しない球対称重力源の中心付近で起きた 2 つの互いに近い事象の間隔を記述する。これは 43 ページの（2.10） 式である。

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} - r^2 d\phi^2 \tag{A}$$

- $d\tau$ はある事象と別の事象の間を動く腕時計で直接測った腕時計時間である。
- dt は中心から遠く離れた時計で測った事象間の時間である（51 ページ）。
- r は、円周を 2π で割った換算円周である（31 ページ）。
- M はメートルの単位で測った引力中心にある質量である（37 ページ）。

（A） 式はシュワルツシルト計量の時間的形式と呼ばれ、時計が光速よりも遅い速さで 2 つの事象間を移動するときに使うと便利である。もしこれが使えなければ 43 ページの空間的形式（2.11）を使う。

$$d\sigma^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} + r^2 d\phi^2 \tag{B}$$

ここで $d\sigma$ は 2 つの事象間の固有距離である：2 つの事象が同時に静止系にあるように動いている棒で記録される事象の距離。

（C）式によって、球殻時計（引力源を中心とする半径 r の定常的な球殻上で静止している時計）の 2 つの刻む音の間の時間経過 dt_{shell} と遠方時計によって測定される同じ 2 つ音の間の時間経過 dt を関係づける。これは 46 ページの（2.19）式である。

$$dt_{\text{shell}} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} dt \tag{C}$$

（D）式によって、 同じ半径方向にある 2 つの事象について、遠方観測者が計算して求めた dr と球殻観測者が直接測定する半径距離 dr_{shell} の間の関係が与えられる。これは 45 ページの（2.12）式である。

$$dr_{\text{shell}} = \frac{dr}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2}} \tag{D}$$

この本では以下の近似をよく使う。この近似は n が正と負、分数の場合に使える。

$$(1 + d)^n \approx 1 + nd \qquad |d| \ll 1 \text{ かつ } |nd| \ll 1 \text{ のとき} \tag{E}$$

物理定数表

光速	$c = 2.99792458 \times 10^8$ メートル/秒
重力定数	$G = 6.6726 \times 10^{-11}$ メートル ^{3}/（キログラム 秒 ^{2}）
プランク定数	$h = 6.6261 \times 10^{-34}$ キログラム メートル ^{2}/秒
電子の電荷	$e = 1.60218 \times 10^{-19}$ クーロン
電子の質量	$m_\mathrm{e} = 9.1094 \times 10^{-31}$ キログラム
	$= 0.510999\mathrm{MeV}$
陽子の質量	$m_\mathrm{p} = 1.67262 \times 10^{-27}$ キログラム
	$= 938.272\mathrm{MeV}$
地球の質量	$M_\mathrm{E} = 5.9742 \times 10^{24}$ キログラム
	$= 0.444$ センチメートル
地球と同じ体積をもつ球の半径	$r_\mathrm{E} = 6.3710 \times 10^6$ メートル
太陽と地球の距離 = 1 天文単位（AU）	$1\mathrm{AU} = 1.495978 \times 10^{11}$ メートル
太陽を回る地球の平均速度	$v_\mathrm{E} = 29.78$ キロメートル/秒
月と地球の平均距離	3.844×10^8 メートル
太陽の質量	$M_\mathrm{Sun} = 1.989 \times 10^{30}$ キログラム
	$= 1.477 \times 10^3$ メートル
太陽の平均半径	$r_\mathrm{S} = 6.9598 \times 10^8$ メートル

変換因子

1 秒 $= 2.99792458 \times 10^8$ 光進時メートル （定義）

1 光進時メートル $= 3.335641 \times 10^{-9}$ 秒

1 年 $= 3.156 \times 10^7$ 秒 $= 9.461 \times 10^{15}$ 光進時メートル

1 キログラム $= 0.6214$ マイル

1 電子ボルト $= 1.602 \times 10^{-19}$ ジュール

1 キログラム $= 7.424 \times 10^{-28}$ 質量メートル

牧野 伸義（まきの のぶよし）
略歴
1966年生
1988年 静岡大学理学部物理学科卒業
1994年 広島大学理学研究科物理学専攻 博士課程 修了
同年 博士(理学) 取得
現在 大分工業高等専門学校 電気電子工学科 助教授
専門は観測的宇宙論、宇宙物理
訳書：『宇宙論入門』（ピアソン・エデュケーション）

一般相対性理論入門

ブラックホール探査

2004年12月25日 初版第1刷発行

■著 者 ……… エドウィン・F・テイラー／ジョン・アーチボルド・ホイーラー
■訳 者 ……… 牧野 伸義
■発行人 ……… 小島 昌光
■発行所 ……… 株式会社ピアソン・エデュケーション
〒167-0051 東京都杉並区荻窪5-26-13 荻窪TMビル6F
出版営業部 電話 (03) 3391-1076 http://www.pearsoned.co.jp
FAX (03) 3391-1135

■印刷＋製本 ……… 三美印刷株式会社

Printed in Japan
ISBN4-89471-427-2